

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH

ANNALEN DER PHYSIK

GEGRÜNDET 1799 DURCH F. A. C. GREN
UND FORTGEFÜHRT DURCH L. W. GILBERT,
J. C. POGGENDORFF, G. u. E. WIEDEMANN,
P. DRUDE

VIERTE FOLGE
BAND 77 HEFT 6
DER GANZEN REIHE 382. BANDES 6. HEFT

KURATORIUM:
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK



LEIPZIG

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1925 erscheinen die Bände 76, 77 und 78 à 8 Hefte. Der Abonnementspreis beträgt pro Band Rm. 20.— zuzüglich Rm. —.80 für Porto bei direkter Zusendung für das Inland und Rm. 1.60 für das Ausland.
Ausgegeben im September 1925.

Inhalt.

	Seite
1. W. v. Ignatowsky. Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen und Erwiderung an F. Kottler	589
2. W. N. Obolensky. Über elektrische Ladungen in der Atmosphäre	644
3. Johann Dejmek. Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zur Verzögerungszeit bei Funkenentladungen	667

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: München, Kolberger Straße 16.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.



Bok
§ 2
sch
Öff
sch
ern
ein
Spr
men

an
der
sta
ebe
sch
Sp
sch

an
fu
Sp
fu
me
wi
R
so
fo

An
me
Pl

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 77.

1. Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen und Erwiderung an F. Kottler¹⁾; von W. v. Ignatowsky.

Inhaltsverzeichnis: I. Berechnung der Beugung an schwarzen Schirmen für verschiedene Fülle. § 1. Allgemeine Betrachtungen. — § 2. Weitere Betrachtungen. — § 3. Beugung an einer kreisrunden schwarzen Scheibe und an einer schwarzen Ebene mit einer kreisrunden Öffnung. — § 4. Beugung an einem schwarzen Streifen und an einer schwarzen Ebene mit einem Spalt. — § 5. Addition der Beugungserscheinungen und das Babinetsche Theorem. — § 6. Beugung an einem Gitter. — § 7. Einige Folgerungen. — § 8. Einführung anderer Sprungwerte. — § 9. Folgerungen aus dem vorhergehenden und Bemerkungen zu den Kottlerschen Sprungwerten.

II. Die Beugung an einer Halbebene. § 10. Die Energieströmung an der Halbebene bei den Kottlerschen Annahmen. — § 11. Kritik der Kottlerschen Behandlung der schwarzen Halbebene. — § 12. Aufstellung der charakteristischen Bedingungen der „Schwärze“ einer Halbebene. — § 13. Die Sommerfeldsche zweierartige Lösung für die schwarze Halbebene. — § 14. Schlußbemerkungen zu den Kottlerschen Sprungwerten. — § 15. Betrachtungen über beliebige unendlich dünne schwarze Schirme.

Anhang: Erwiderung an F. Kottler.

In der vorliegenden Arbeit berechnete ich die Beugung an schwarzen Schirmen, nach der Auffassung von F. Kottler, für eine kreisrunde Scheibe, eine ebensolche Öffnung, Ringe, Spalt, Streifen und Gitter. Hierzu benutzte ich die von mir für andere Zwecke gemachten Untersuchungen (siehe Anmerkung zu § 9) und gebe deshalb hier nur die Resultate an, wie ich überhaupt die Zwischenrechnungen meistens wegen Raummangel vermeide, da es mir ja nicht auf diese ankommt, sondern auf die Schlüsse, die aus den angeführten Resultaten folgen.

1) F. Kottler, „Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen“, Ann. d. Phys. 70. S. 405. 1923, zitiert als Arbeit A und „Elektromagnetische Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen“, Ann. d. Phys. 71. S. 457. 1923, zitiert als Arbeit B.

Die Konsequenzen, die sich bei der Beugung am Gitter und an der schwarzen Halbebene ergaben, führten mich zu dem Schluß, daß die Auffassung von Kottler der Beugung an schwarzen Schirmen als eines Sprungwertproblems nicht haltbar sein kann.

Ich stellte deshalb in § 12 andere Bedingungen auf, die charakteristisch für eine schwarze Halbebene sein sollen und aus welchen folgt, daß die Sommerfeldsche zweiwertige Lösung diejenige ist, welche einer schwarzen Halbebene entspricht, wie dies aus § 13 ersichtlich wird.

Auf Grund des obigen und der allgemeinen Betrachtungen des § 15 komme ich nun zu dem folgenden Schluß:

„Das Problem der Beugung an schwarzen Schirmen kann nicht als Sprungwertproblem, bei vorher angegebenen Sprungwerten, betrachtet werden, sondern es müssen die Bedingungen der „Schwärze“ für jeden Schirm besonders untersucht werden, unter Berücksichtigung des Babinetschen Theorems für den nichtphysikalischen Raum.“

Bei allen Betrachtungen benutzte ich die von Kottler eingeführten Begriffe des physikalischen bzw. nichtphysikalischen Raumes (Arbeit A, § 5), wobei die Kommunikation zwischen diesen Räumen durch den schwarzen Schirm hergestellt wird.

Im Anhang endlich habe ich Hrn. Kottler auf die Bemerkungen, die er bezüglich einiger meiner Arbeiten gemacht hat, erwidert.

I. Berechnung der Beugung an schwarzen Schirmen für verschiedene Fülle.

§ 1. Allgemeine Betrachtungen.

Im folgenden werden wir nur solche Zustände betrachten, welche periodisch in der Zeit sind, und deshalb überall den Faktor $e^{i\omega t}$ streichen.

Außerdem nehmen wir der Einfachheit halber an, daß sich alle Vorgänge im Vakuum abspielen.

Es ist:

$$(1) \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad x = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

($c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec = Lichtgeschwindigkeit, λ = Wellenlänge und T ist die Periode).

Es lauten dann die Maxwell'schen Gleichungen, im absoluten elektromagnetischen Maßsystem:

$$(2) \quad \frac{i\kappa}{c} \mathfrak{E} = \text{rot } \mathfrak{H}; \quad - i\kappa c \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{E},$$

woraus folgt:

$$(3) \quad \text{div } \mathfrak{E} = 0; \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0.$$

Ferner ergibt sich aus (2) und (3):

$$(4) \quad \kappa^2 \mathfrak{E} = \text{rot}^2 \mathfrak{E} = -\nabla^2 \mathfrak{E}$$

und ein analoger Ausdruck für \mathfrak{H} .

Dieses wird die *vektorische* Wellengleichung für \mathfrak{E} bzw. \mathfrak{H} sein. Für die Komponente u von \mathfrak{E} bzw. \mathfrak{H} , nach einer beliebigen, aber konstanten Richtung, erhalten wir aus (4) die *skalare* Wellengleichung

$$(5) \quad \text{div } \nabla u + \kappa^2 u = 0.$$

Ist ein Vektor \mathfrak{B} innerhalb eines Volumens V mit der Oberfläche F endlich und stetig, zusammen mit den ersten und zweiten Derivierten nach den Koordinaten, so haben wir allgemein¹⁾:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot}^2 \mathfrak{B} + b^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2}}{r_{t+br}} dv - \frac{\nabla}{4\pi} \int_V \frac{\text{div } \mathfrak{B}}{r_{t+br}} dv \\ &+ \frac{\nabla}{4\pi} \int_F \frac{\mathfrak{B} n}{r_{t+br}} df + \frac{\text{rot}}{4\pi} \int_F \frac{[\mathfrak{B} n]}{r} df - \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{[n \text{ rot } \mathfrak{B}]}{r_{t+br}} df, \end{aligned} \right.$$

wo n die *äußere* Normale und b eine Konstante bedeutet. r ist die Entfernung vom Aufpunkt bis zu einem Volumen bzw. Flächenelement, wobei der Aufpunkt innerhalb des Volumens V gedacht ist.

Der Index $t+br$ bedeutet, daß nach Ausführung der entsprechenden Operationen unter den Integralen statt t die Größe $t+br$ zu setzen ist.

Machen wir in (6) $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$, $b = -\frac{1}{c}$ und gehen dann zu

1) W. v. Ignatowsky, „Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik“, Teubner, Leipzig 1909, Bd. I, S. 55, Formel (140). In der jetzt erscheinenden dritten Auflage ist die Ableitung dieser Formel bedeutend vereinfacht.

zeitlich periodischen Zuständen über, so erhalten wir infolge von (2) bis (4):

$$(7) \quad \mathfrak{E} = \frac{\nabla}{4\pi} \int_F \frac{\mathfrak{E} n}{r} e^{-i\kappa r} df - \text{rot } \mathfrak{M} + i c \kappa \mathfrak{M}$$

und analog:

$$(7a) \quad \mathfrak{H} = \frac{\nabla}{4\pi} \int_F \frac{\mathfrak{H} n}{r} e^{-i\kappa r} df - \text{rot } \mathfrak{N} - \frac{i\kappa}{c} \mathfrak{M},$$

wobei:

$$(8) \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{[\mathfrak{E} n]}{r} e^{-i\kappa r} df; \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{4\pi} \int_F \frac{[\mathfrak{H} n]}{r} e^{-i\kappa r} df$$

bedeuten.

Nehmen wir nun den Rotor von den Gleichungen (7) und beachten (2), so ergibt sich:

$$(9) \quad \mathfrak{E} = \frac{i c}{\kappa} \text{rot}^2 \mathfrak{N} - \text{rot } \mathfrak{M}; \quad \mathfrak{H} = -\frac{i}{c \kappa} \text{rot}^2 \mathfrak{M} - \text{rot } \mathfrak{N}.$$

Wir bezeichnen ferner:

$$(10) \quad p = \frac{1}{4\pi} \int_F \mathfrak{E} n \cdot \frac{e^{-i\kappa r}}{r} df; \quad m = \frac{1}{4\pi} \int_F \mathfrak{H} n \cdot \frac{e^{-i\kappa r}}{r} df.$$

Alle vier Größen \mathfrak{M} , \mathfrak{N} , p und m genügen der vektorischen bzw. der skalaren Wellengleichung, z. B.:

$$(11) \quad \kappa^2 \mathfrak{N} + \nabla^2 \mathfrak{N} = 0; \quad \kappa^2 p + \nabla^2 p = 0.$$

Nehmen wir deshalb div von (7) bzw. (7a), so folgt, wegen (3):

$$(12) \quad \frac{i c}{\kappa} \text{div } \mathfrak{N} = p; \quad -\frac{i}{c \kappa} \text{div } \mathfrak{M} = m.$$

Unter Beachtung der Beziehung:

$$(13) \quad \text{rot}^2 \mathfrak{N} = \nabla \text{div } \mathfrak{N} - \nabla^2 \mathfrak{N}$$

können wir z. B. schreiben:

$$(14) \quad \text{rot}^2 \mathfrak{N} = \nabla \text{div } \mathfrak{N} + \kappa^2 \mathfrak{N}.$$

Deshalb statt (9):

$$(15) \quad \mathfrak{E} = \frac{i c}{\kappa} \nabla \text{div } \mathfrak{N} - i c \kappa \mathfrak{N} - \text{rot } \mathfrak{M}$$

und:

$$(15a) \quad \mathfrak{H} = -\frac{i}{c \kappa} \nabla \text{div } \mathfrak{M} + \frac{i \kappa}{c} \mathfrak{M} - \text{rot } \mathfrak{N}$$

und dies sind nichts anderes als die Gleichungen von Macdonald¹⁾, welche mit (9) insofern gleichbedeutend sind, als in beiden nur die tangentialen Komponenten auftreten.

Infolge der Gleichungen (12) ersehen wir, daß wir sofort von (15) zu (7) übergehen können.

Diese Beziehungen (12) erklären sich dadurch, daß durch die Kenntnis der tangentialen Komponenten z. B. von \mathfrak{H} auf F uns dadurch auch die normalen Komponenten von \mathfrak{E} auf F bekannt sein werden.

Aus dem obigen ersehen wir, daß wir die allgemeine Beziehung (6) an die Spitze setzen müssen, denn aus derselben folgt, mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen, das System (7), welches, zusammen mit den Systemen (9) und (15), sozusagen einen Kreislauf bildet.²⁾

§ 2. Weitere Betrachtungen.

Zum Verständnis des folgenden wollen wir vorerst einige bekannte Sachen in Kürze erwähnen.

Die rechten Seiten der Gleichungen (7), (9) und (15) § 1 stellen Oberflächenintegrale längs der Oberfläche F dar, weshalb wir diese Gleichungen kurz folgendermaßen schreiben können:

$$(1) \quad \mathfrak{E} = \psi(F); \quad \mathfrak{H} = f(F).$$

Wir denken uns jetzt eine Oberfläche F_1 , die die Lichtquelle umschließt, ferner eine solche F_2 , die die beugenden Körper umschließt, und endlich eine Fläche F_3 , welche die beiden vorhergehenden Flächen umschließt, und betrachten als

1) K. M. Macdonald, „Electr. Waves“, Cambridge 1902, Univ. Press, p. 16—17 und auch Phil. Trans. of Royal Soc. London 1913, Vol. 212, p. 299.

2) Das Integral (6), speziell für die Maxwellschen Gleichungen (mit einer bestimmten Dielektrizitätskonstante und Leitfähigkeit und auch bei einem willkürlichen b) zugerichtet, wodurch sich nur die Form der Volumintegrale ändert, wurde schon von mir im Jahre 1902 abgeleitet (siehe meine Arbeit: „Reflexion elektromagnetischer Wellen an einem Draht“, Ann. d. Phys. 18. 1905. S. 505, Anmerkung) und dann noch einmal diese Ableitung in meiner Arbeit: „Diffraction und Reflexion, abgeleitet aus den Maxwellschen Gleichungen“, Ann. d. Phys. 25. 1908, § 10, wiederholt.

Volumen V dasjenige, welches durch alle diese drei Flächen begrenzt wird.

Der Aufpunkt befinde sich innerhalb V , also *außerhalb* der Volumina, welche durch F_1 und F_2 begrenzt werden.

Statt (1) erhalten wir dann in leicht verständlicher Weise:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \psi(F_1) + \psi(F_2) + \psi(F_3) \\ \mathfrak{H} = f(F_1) + f(F_2) + f(F_3). \end{cases}$$

Rücken wir mit F_2 ins Unendliche, so wird:

$$\psi(F_3) = f(F_3) = 0.$$

Ferner stellen bekanntlich $\psi(F_1)$ und $f(F_1)$ die entsprechenden Werte von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} für die einfallende Welle im Aufpunkte dar, welche wir durch \mathfrak{E}_0 und \mathfrak{H}_0 bezeichnen werden und im folgenden immer als bekannt voraussetzen.

Wir erhalten deshalb endgültig statt (2):

$$(3) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \psi(F_2); \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + f(F_2).$$

Wir wenden uns jetzt zu der Kirchhoffschen Formulierung des Huygensschen Prinzips für einen Skalar u , welcher der Wellengleichung (5) § 1 genügt:

$$(4) \quad u = -\frac{1}{4\pi} \int_F \left\{ u \nabla \left(\frac{e^{-i\kappa r}}{r} \right) - \frac{e^{-i\kappa r}}{r} \nabla u \right\} df.$$

Bezeichnen wir durch G_1 die erste Greensche Funktion (G_1 verschwindet längs F), so erhalten wir aus (4):

$$(5) \quad u = -\frac{1}{4\pi} \int_F u \nabla G_1 df.$$

Bekanntlich dürfen wir u und ∇u zugleich nicht willkürlich auf F in (4) ansetzen, was sich auf Grund des bekannten Satzes erklärt, welcher lautet¹⁾: „Verschwinden u und ∇u längs eines, wenn auch sehr kleinen Flächenstückes, so ist überhaupt u überall identisch gleich Null.“ Aus diesem Satz ersehen wir, daß die *zwei* Größen u und ∇u miteinander verbunden sein werden, weshalb nur *eine* von ihnen willkürlich angenommen werden darf.

Dies obige vorausgeschickt, kehren wir nun zu unseren Betrachtungen zurück.

1) F. Pockels, „Über die Differentialgleichung: $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ “, Teubner, Leipzig 1891, S. 212.

Ein dem vorigen analoger Satz läßt sich nun auch für die Maxwell'schen Gleichungen, in der Form (2) § 1, also für periodische Zustände, aufstellen, welcher lautet: „Verschwinden die tangentialen Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} auf einem, wenn auch sehr kleinen Flächenstück, so wird \mathfrak{E} und demnach auch \mathfrak{H} , identisch gleich Null überall.“

Hieraus geht klar hervor, daß die tangentialen Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} miteinander verbunden sein werden und daß wir deshalb beide zugleich, z. B. in (9) oder (15), § 1, nicht willkürlich ansetzen dürfen.

Wir gehen jetzt zu rechtwinkligen Koordinaten über und schreiben:

$$(6) \quad \mathfrak{E} = iX + jY + kZ; \quad \mathfrak{H} = iX_1 + jY_1 + kZ_1.$$

Da nun jede der Komponenten der Wellengleichung genügt, so ergibt uns (5):

$$(7) \quad \mathfrak{E} = -\frac{1}{4\pi} \int_F \mathfrak{E} \cdot n \nabla G_1 df; \quad \mathfrak{H} = -\frac{1}{4\pi} \int_F \mathfrak{H} \cdot n \nabla G_1 df.$$

Es sei nebenbei bemerkt, daß leicht zu zeigen ist, daß die rechten Seiten der Gleichungen (7) identisch mit den rechten Seiten der Gleichungen (7) § 1 sind.

Nehmen wir nun auf F z. B. Y und Z in (6) willkürlich an, so dürfen wir dies bei X nicht mehr tun, denn innerhalb V muß X von solcher Beschaffenheit sein, daß die Divergenzbedingung (3) § 1 erfüllt ist.

Aus dem folgenden Beispiel, welches wir später öfters brauchen werden, wird das eben Gesagte klar.

Wir denken uns unter dem Volumen V einen unendlichen Halbraum, der einerseits durch die Ebene YZ begrenzt ist und andererseits durch eine Halbkugel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfang und dem unendlich großen Radius R (positiver Halbraum $x \geq 0$).

Hierbei setzen wir ausdrücklich voraus, daß alle Lichtquellen und beugenden Körper sich im *negativen* Halbraum ($x \leq 0$) befinden sollen.

Gehen wir wieder von der elektrischen Kraft aus und wenden die erste Greensche Funktion für eine Ebene an, so erhalten wir:

$$(8) \quad Y = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\infty} \frac{Y e^{-i\pi r}}{r} df; \quad Z = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\infty} \frac{Z e^{-i\pi r}}{r} df,$$

wo also die Integration längs der ganzen YZ -Ebene auszuführen ist. Der Aufpunkt befindet sich im positiven Halbraum.

Für die Größen Y und Z der elektrischen Kraft auf der YZ -Ebene werden wir, laut dem vorhergehenden, willkürliche Werte ansetzen können, bis zu einer Beschränkung, die aus dem folgenden klar wird.

Die Divergenzbedingung ergibt nun für die dritte Komponente X :

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ X - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\infty} \frac{Y e^{-i\pi r}}{r} df - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\infty} \frac{Z e^{-i\pi r}}{r} df \right\} = 0.$$

Den Klammerausdruck können wir nicht konstant (außer gleich Null) annehmen und ebensowenig unabhängig von x . Denn da wir ausdrücklich vermerkt haben, daß sich alle Lichtquellen und beugenden Körper im negativen Halbraum befinden sollen, so müssen wir im positiven Halbraum Wellen erhalten, die nach der positiven Richtung von x verlaufen und demnach von x abhängen werden.

Also müssen wir den Klammerausdruck in (9) gleich Null setzen und erhalten deshalb:

$$(10) \quad X = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\infty} \frac{Y e^{-i\pi r}}{r} df + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{\infty} \frac{Z e^{-i\pi r}}{r} df.$$

Fassen wir nun (8) und (10) zusammen, so können wir schreiben:

$$(11) \quad \mathfrak{E} = -2 \operatorname{rot} \mathfrak{M}_{\infty},$$

wobei:

$$(12) \quad \mathfrak{M}_{\infty} = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{[\mathfrak{n} \mathfrak{E}]}{r} e^{-i\pi r} df$$

bedeutet, die Integration längs der ganzen YZ -Ebene auszuführen ist und \mathfrak{n} die äußere Normale zu dem Volumen V , d. h. $\mathfrak{n} = -i$ sein wird.

Aus (11) folgt:

$$(13) \quad \mathfrak{H} = -\frac{2i}{\pi c} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{M}_{\infty}.$$

In analoger Weise erhalten wir, wenn wir von der magnetischen Kraft ausgehen:

$$(14) \quad \mathcal{E} = \frac{2ic}{\pi} \operatorname{rot}^2 \mathcal{N}_\infty; \quad \mathcal{H} = -2 \operatorname{rot} \mathcal{N}_\infty,$$

wobei:

$$(15) \quad \mathcal{N}_\infty = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{[n \mathcal{H}]}{r} e^{-i\kappa r} df$$

sein wird.

Da wir es hier mit unendlichen Räumen zu tun haben, so müssen wir vorsichtig sein¹⁾, und deshalb sind obige Resultate nur richtig, falls gewisse Oberflächenintegrale längs der unendlich entfernten Halbkugel verschwinden werden.

Dieses wird nun der Fall, wenn \mathcal{E} bzw. \mathcal{H} auf der unendlich entfernten Halbkugel in die Form:

$$(16) \quad \frac{e^{-i\kappa R}}{R} f; \quad R \rightarrow \infty,$$

wo f eine Winkelfunktion bedeutet, oder in die Form:

$$(17) \quad e^{-i\kappa x}; \quad R \rightarrow \infty$$

übergeht.

Der Unterschied zwischen (16) und (17) besteht darin, daß im ersten Fall der Integrand im bewußten Integral für $R \rightarrow \infty$ verschwindet, während im zweiten Fall dies das gesamte Integral tut.²⁾

Demnach können wir die tangentialen Komponenten von \mathcal{E} bzw. von \mathcal{H} auf der YZ -Ebene willkürlich wählen, bis zu der Einschränkung, welche durch (16) und (17) auferlegt wird, welche Bedingungen auf der unendlich entfernten Halbkugel bis zu der YZ -Ebene heran gültig sind.

1) F. Pockels, a. a. O. S. 305 ff.

2) Statt der Bedingung (17) können wir eine ebene Welle nehmen, deren Fortpflanzungsrichtung einen beliebigen Winkel γ mit der positiven X -Achse bildet, nur muß hierbei $\gamma < \frac{\pi}{2}$ sein, was ja mit der im Text ausgesprochenen Forderung, daß alle Lichtquellen im negativen Halbraum liegen sollen, im Einklang ist.

Die entsprechenden Integrale werden dann immer bei $R \rightarrow \infty$ verschwinden.

Der Vergleich von (13) und der zweiten Gleichung von (14) bzw. der ersten Gleichung von (14) und (11) ergibt uns:

$$(18) \quad \operatorname{rot}^2 \mathfrak{N}_\infty = \frac{i\pi}{c} \operatorname{rot} \mathfrak{M}_\infty; \quad \frac{i}{\pi c} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{M}_\infty = \operatorname{rot} \mathfrak{N}_\infty.$$

Ferner ergibt uns die Addition von (11) und der ersten Gleichung von (14):

$$(19) \quad \mathfrak{E} = \frac{i c}{\pi} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{N}_\infty - \operatorname{rot} \mathfrak{M}_\infty$$

und die Addition von (13) und der zweiten Gleichung von (14):

$$(19a) \quad \mathfrak{H} = -\frac{i}{\pi c} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{M}_\infty - \operatorname{rot} \mathfrak{N}_\infty,$$

welche Gleichungen der Form nach mit den Gleichungen (9) § 1 übereinstimmen.

Setzen wir nun beispielsweise:

$$(20) \quad Y = 1; \quad Z = 0 \text{ auf } F$$

und deshalb, wegen der Divergenzbedingung $X = 0$, so erhalten wir:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= -2 \operatorname{rot} \mathfrak{M}_\infty = \frac{2 i c}{\pi} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{N}_\infty \\ &= \frac{i c}{\pi} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{N}_\infty - \operatorname{rot} \mathfrak{M}_\infty = j e^{-i\pi x} \end{aligned} \right.$$

und

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H} &= -\frac{2 i}{\pi c} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{M}_\infty = -2 \operatorname{rot} \mathfrak{N}_\infty \\ &= -\frac{i}{\pi c} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{M}_\infty - \operatorname{rot} \mathfrak{N}_\infty = \frac{f}{c} e^{-i\pi x}. \end{aligned} \right.$$

Durch die Ausdrücke (22) und (23) haben wir demnach die ebene Welle:

$$(23) \quad \mathfrak{E} = j e^{-i\pi x}; \quad \mathfrak{H} = \frac{f}{c} e^{-i\pi x}$$

innerhalb des positiven Halbraums definiert.

Auf der YZ -Ebene erhalten wir demnach, bei der angenommenen Richtung der Normale n :

$$(24) \quad [n \mathfrak{E}] = -f; \quad [n \mathfrak{H}] = j; \quad x = 0.$$

Alles obige bezog sich auf die *Randwerte* von F .

Haben wir nun eine schwarze Scheibe (welche wir mit Kottler als Sprungfläche auffassen werden, vgl. die Figur des folgenden Paragraphen) und umringen dieselbe mit einer

Fläche F laut (3), welche sich an die Scheibe unendlich dicht anschließen soll, so können wir in den Gleichungen (9) § 1 [u \mathfrak{E}] und [u \mathfrak{H}] als Sprungwerte auffassen, dieselben willkürlich wählen und nur längs einer ungeschlossenen Fläche, d. h. längs der Scheibe, integrieren.

Nach dem vorhergehenden wird die erhaltene Lösung sich von selbst so regeln, daß auf keinem Stück von F die tangentialen Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} zugleich verschwinden werden, und wie man aus (9) § 1 ersieht, ist die Divergenzbedingung erfüllt.

Wir kehren nun zu den allgemeinen Formeln (13) bis (15) zurück und ersehen aus denselben, daß, falls auf der YZ -Ebene $Y = Z = 0$ sein werden, \mathfrak{E} und \mathfrak{H} überall im positiven Halbraum verschwinden müssen, woraus dann die Eindeutigkeit der Lösung folgt.

Wenn nun Pockels¹⁾ annimmt, daß wir noch unendlich viele Arten von Wellen in unserem positiven Halbraum annehmen können, die an der YZ -Ebene vollkommen reflektieren (z. B. stehende Wellen), so ist dieser Einwand in unserem Fall nicht angebracht. Denn solche Wellen würden Lichtquellen erfordern, die im positiven Halbraum liegen, während wir doch ausdrücklich vorausgesetzt haben, daß alle Lichtquellen bzw. beugenden Körper im negativen Halbraum liegen sollen.

Dieses wäre der physikalische Grund der Eindeutigkeit der Lösung.

Der mathematische Grund liegt einfach darin, daß, falls wir in (16) bzw. (17) $-i$ statt i setzen (was physikalisch auf dasselbe herauskommt, als ob Lichtquellen im positiven Halbraum lägen), die oben erwähnten Integrale längs der unendlich entfernten Halbkugel eben *nicht* verschwinden werden.

Auf die explizierte Darstellung dieser Integrale und auf weitere Details können wir hier nicht eingehen (vgl. Anmerkung zu § 9).

§ 3. Beugung an einer kreisrunden schwarzen Scheibe und an einer schwarzen Ebene mit einer kreisrunden Öffnung.

Es sei eine unendlich dünne kreisrunde schwarze Scheibe mit dem Radius a (Fig. 1, wo die Z -Achse senkrecht zu der

1) F. Pockels, a. a. O. S. 310.

Figur ist) gegeben. Die Scheibe liegt in der YZ -Ebene mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfang.

Als einfallende Welle nehmen wir eine ebene Welle an, die sich in der Richtung der positiven x bewegt mit der elektrischen Kraft parallel der Y -Achse. D. h. wir setzen:

$$(1) \quad \mathfrak{E}_0 = j e^{-inx}; \quad \mathfrak{H}_0 = \frac{1}{c} e^{-inx}$$

Als positive ($x \geq 0$) Seite der Scheibe bezeichnen wir die Schattenseite und als negative ($x \leq 0$) die belichtete Seite.

Entsprechend (3) § 2 umschließen wir die Scheiben mit der Fläche F_2 , schmiegen dieselbe unendlich nahe an die

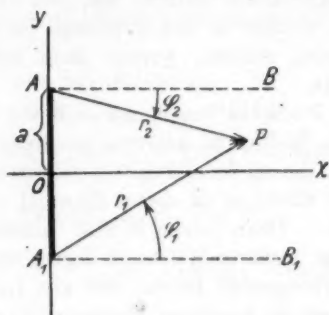


Fig. 1.

Scheibe an, bezeichnen die entsprechenden Werte auf F auf der negativen Seite der Scheibe durch den Index 1 und diejenigen auf der positiven Seite durch den Index 2 und setzen:

$$(2) \quad \mathfrak{D} = [n_1 \mathfrak{E}_1] + [n_2 \mathfrak{E}_2]; \quad \mathfrak{C} = [n_1 \mathfrak{H}_1] + [n_2 \mathfrak{H}_2].$$

Es ist dann klar, daß wir bei der Berechnung der Werte von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} im Aufpunkt laut den Gleichungen (7) § 1, in (8) § 1, an Stelle von $[n \mathfrak{E}]$ und $[n \mathfrak{H}]$ die obigen Größen \mathfrak{D} und \mathfrak{C} einsetzen müssen.

Aus (3) § 2 folgt ferner, daß die Normale auf F_2 nach innen gerichtet sein wird, d. h. wir werden $n_1 = i$ und $n_2 = -i$ haben.

Im Anschluß an unsere allgemeinen Formeln (11) bis (15) § 2 setzen wir nun $n_2 = n$ und erhalten dann statt (2):

$$(3) \quad \mathfrak{D} = -[n(\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2)]; \quad \mathfrak{C} = -[n(\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2)].$$

Hier führen wir nun die von Kottler gebrauchten Sprungwerte ein, weshalb sich dann, unter Berücksichtigung von (1), bei $x = 0$, ergibt:

$$(4) \quad \mathfrak{D} = -[n \mathfrak{E}_0] = \mathfrak{f}; \quad \mathfrak{G} = -[n \mathfrak{H}_0] = -\frac{j}{c}; \quad x = 0.$$

Aus (8) § 1 folgt dann:

$$(5) \quad \mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{f}}{4\pi} \int_f \frac{e^{-ixr}}{r} df; \quad \mathfrak{N} = -\frac{j}{4\pi c} \int_f \frac{e^{-ixr}}{r} df,$$

wo also die Integration längs der ungeschlossenen Fläche f der Scheibe auszuführen ist.

Statt (5) schreiben wir aus Gründen, die aus dem folgenden klar werden:

$$(6) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{f} \frac{a}{2} V_{0,1,0}; \quad \mathfrak{N} = -j \frac{a}{2} V_{0,1,0}$$

und erhalten dann, wegen (3) § 2, mit Hilfe von (7) § 1, für die gesamte elektrische bzw. magnetische Kraft:

$$(7) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}'; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}',$$

wobei

$$(8) \quad \mathfrak{E}' = -\frac{ia}{2\pi} \text{rot}^2(j V_{0,1,0}) - \frac{a}{2c} \text{rot}(\mathfrak{f} V_{0,1,0})$$

und

$$(8a) \quad \mathfrak{H}' = -\frac{ia}{2c\pi} \text{rot}^2(\mathfrak{f} V_{0,1,0}) + \frac{a}{2c} \text{rot}(j V_{0,1,0})$$

bedeuten und die entsprechenden Werte für die *gebeugte* Welle darstellen.

Hierdurch wäre die Lösung gegeben und wir brauchen jetzt nur die Funktion $V_{0,1,0}$ zu untersuchen. Ohne auf nähere Details einzugehen (vgl. Anmerkung zu § 9), wollen wir hier nur einige Resultate anführen.

Zu dem Zweck gehen wir zu Zylinderkoordinaten über mit der X -Achse als Rotationsachse und es bezeichne ϱ die Entfernung eines Punktes von der X -Achse.

Es wird dann sein, falls wir $\alpha x = q$ bezeichnen:

$$(9) \quad q V_{0,1,0} = i q \int_{1-i\infty}^1 \frac{e^{-ixza} J_0(x\varrho\sqrt{1-\alpha^2}) J_1(q\sqrt{1-\alpha^2}) d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Für $R = \sqrt{\varrho^2 + x^2} > a$ läßt sich (9) durch folgende Reihe darstellen:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} q V_{0,1,0} &= \frac{q^2}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\pi R}\right)^{1/2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} \left(\frac{q}{2}\right)^{2\lambda} \left(\frac{2}{\pi R}\right)^{\lambda} \lambda!}{\Gamma(\lambda+2)} \\ &\quad \sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{(-1)^{\mu} \left(\frac{q}{R}\right)^{2\mu} \left(\frac{\pi R}{2}\right)^{\mu} Q_{\mu+\lambda+1/2}^{(\pi R)}}{\mu! \mu! \Gamma(\lambda+1-\mu)}. \end{aligned} \right.$$

Hierbei ist:

$$(11) \quad Q_{\nu}(x) = \frac{i\pi}{2} \{J_{\nu}(x) - iY_{\nu}(x)\},$$

wo $J_{\nu}(x)$ die Besselsche und $Y_{\nu}(x)$ die Neumannsche Zylinderfunktion, in der Bezeichnungsweise von Nielsen, bedeuten.

In der Nähe der Scheibe haben wir:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} q V_{0,1,0} &= i e^{-i\pi x} - \frac{q^2}{\pi} \left(\frac{2}{q}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\pi x)^{2r}}{2r!} \left(\frac{2}{q}\right)^r \\ &\quad \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{q}{a}\right)^{\lambda} J_{\lambda}(\pi q) \Gamma(\lambda+r+1/2) Q_{\lambda+r-1/2}^{(q)}}{\lambda!}. \end{aligned} \right.$$

Ferner wird sein:

$$(13) \quad \frac{\partial q V_{0,1,0}}{\partial \pi x} = 0; \quad x=0; \quad \rho \geq a$$

und

$$(14) \quad \frac{\partial q V_{0,1,0}}{\partial \pi x} = 1; \quad x=0; \quad \rho \leq a,$$

d. h. auf der positiven Seite der Scheibe. Auf der negativen Seite ist:

$$(14a) \quad \frac{\partial q V_{0,1,0}}{\partial \pi x} = -1; \quad x=0; \quad \rho \leq a,$$

wodurch die notwendigen Sprünge erreicht werden.

Endlich wird für $R \rightarrow \infty$ sein:

$$(15) \quad q V_{0,1,0} = -\frac{a}{R} \cdot \frac{q}{R} e^{-i\pi R} J_1\left(\frac{q}{R}\right); \quad R \rightarrow \infty.$$

Die Funktion $V_{0,1,0}$ selbst hat auf beiden Seiten der Scheibe dieselben Werte, wie man dies schon aus (10) ersieht, welcher Ausdruck ja in bezug auf die YZ -Ebene symmetrisch ist.

Will man nun mit Kottler den Sprung auf die geometrische Schattengrenze, d. h. längs der Linien AB bzw. $A_1 B_1$ Fig. 1 verlegen, so braucht man nur zu beachten, daß man auch schreiben kann:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} q V_{0,1,0} &= i e^{-i\pi x} - \frac{i q}{2\pi\pi} \\ &\int_0^{2\pi} \frac{(a - q \cos \varphi) e^{-i\pi x \sqrt{x^2 + q^2 + a^2 - 2aq \cos \varphi}} d\varphi}{a^2 + q^2 - 2aq \cos \varphi}; \quad q < a. \end{aligned} \right.$$

Für $q > a$ fällt das erste Glied rechterseits in (16) weg.

Aus diesen Ausdrücken ersehen wir, daß das Integral an der geometrischen Schattengrenze den notwendigen Sprung erleidet.

Im Falle einer Öffnung haben wir uns in der Fig. 1 vorzustellen, daß die schwarze Ebene aus dem Teil der YZ -Ebene besteht, welcher außerhalb der Scheibe liegt, da wir den Radius der Öffnung gleich demjenigen der Scheibe annehmen, weshalb auch die geometrische Schattengrenze dieselbe bleibt.

Auch hier denken wir uns eine Fläche F_2 , die die schwarze Ebene dicht umschließt, z. B. ein einschaliges Rotationshyperboloid.

Es folgen dann für \mathfrak{M} und \mathfrak{N} dieselben Werte wie in (5), nur daß wir hier unter f nicht die Scheibe, sondern die ganze YZ -Ebene mit Ausschluß der Öffnung verstehen müssen.

Ergänzen wir nun diese Integrale durch solche über die Öffnung und beachten hierbei, daß die Werte von \mathfrak{D} und \mathfrak{E} in (4) gerade entgegengesetzt denjenigen von (24) § 2 sind, so erhalten wir für den positiven Halbraum (Schattenseite):

$$(17) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}''; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}''$$

und für den negativen Halbraum (Lichtseite):

$$(18) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}''; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}'',$$

wobei wieder \mathfrak{E}'' und \mathfrak{H}'' die entsprechenden Werte für die gebeugte Welle sein werden und, laut dem eben Gesagten, den Beziehungen:

$$(19) \quad \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'' = 0; \quad \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'' = 0,$$

auf welche wir später noch zurückkommen werden, genügen.

§ 4. Beugung an einem schwarzen Streifen und an einer schwarzen Ebene mit einem Spalt.

Der schwarze Streifen sei in der Richtung der Z -Achse unendlich lang, habe die Breite $2a$ und liege in der YZ -Ebene. Wir können deshalb die Fig. 1 gebrauchen.

Als einfallende Welle nehmen wir an:

$$(1) \quad \mathfrak{E}_0 = t e^{-i\kappa x}; \quad \mathfrak{H}_0 = -\frac{i}{c} e^{-i\kappa x}.$$

Die elektrische Kraft ist also parallel dem Streifen. Den Fall, daß sie senkrecht dazu ist, wollen wir nicht betrachten, da er sich prinzipiell nicht von dem ersteren Fall unterscheidet.

Auf Grund analoger Überlegungen, wie in § 3, erhalten wir für die Sprungwerte \mathfrak{D} und \mathfrak{E} :

$$(2) \quad \mathfrak{D} = -j; \quad \mathfrak{E} = -\frac{t}{c}$$

und deshalb:

$$(3) \quad \mathfrak{M} = -\frac{i}{4\pi} \int \frac{e^{-i\kappa r}}{r} df; \quad \mathfrak{N} = -\frac{t}{4\pi c} \int \frac{e^{-i\kappa r}}{r} df,$$

wo jetzt f die Fläche des Streifens bedeutet.

Da wir ein ebenes Problem haben, also $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ sein wird, so können wir nach z integrieren und erhalten:

$$(4) \quad \mathfrak{M} = \frac{i}{2\pi} \int_l Q_0(\kappa R) dl; \quad \mathfrak{N} = \frac{t}{2\pi c} \int_l Q_0(\kappa R) dl,$$

wobei das Linienintegral in der Richtung der positiven Y -Achse längs des Streifens auszuführen ist. R bedeutet die Entfernung von dem Aufpunkt, welchen wir uns in der YX -Ebene denken, bis zu einem Linienelement dl . $Q_0(\kappa R)$ ist dieselbe Funktion wie in (11) § 3.

Statt (4) schreiben wir:

$$(5) \quad \mathfrak{M} = \frac{i}{\kappa} \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \Phi_{1/2,0}; \quad \mathfrak{N} = \frac{t}{c\kappa} \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \Phi_{1/2,0}.$$

Da die Funktion $\Phi_{1/2,0}$ der Wellengleichung, welche in unserem Fall in:

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \kappa^2 u = 0$$

übergeht, genügt, so erhalten wir, falls wir die Werte (5) in die Gleichungen (7) § 1 einsetzen, die Operationen rot berechnen und (4) und (6) berücksichtigen:

$$(7) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}'; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}',$$

wobei:

$$(8) \quad \mathfrak{E}' = \mathfrak{k} \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \left\{ i \Phi_{1/2,0} - \frac{\partial \Phi_{1/2,0}}{\partial x} \right\} = \mathfrak{k} \cdot A$$

und:

$$(8a) \quad \mathfrak{H}' = i \cdot \frac{i}{c} \frac{\partial A}{\partial y} - i \cdot \frac{i}{c} \frac{\partial A}{\partial x}$$

bedeuten und die entsprechenden Werte für die gebeugte Welle darstellen.

Die Lösung wäre demnach gegeben und wir brauchen nur die Funktion $\Phi_{1/2,0}$ bzw. A zu untersuchen. Auch hier werden wir nur einige Resultate anführen. Es wird sein:

$$(9) \quad \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \Phi_{1/2,0} = \frac{i}{\pi} \int_{1-i\infty}^1 \frac{e^{-i\pi x a} \cos(\pi y \sqrt{1-a^2}) \sin(q \sqrt{1-a^2}) dx}{1-a^2}.$$

Für $\varrho = \sqrt{y^2 + x^2} > a$ haben wir, in Analogie mit (10) § 3:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \Phi_{1/2,0} &= \frac{q}{2\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} \left(\frac{q}{2}\right)^{2\lambda} \left(\frac{2}{x\varrho}\right)^{\lambda} \Gamma(\lambda + 1/2)}{\Gamma(\lambda + 3/2)} \\ &\quad \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda} \frac{(-1)^{\mu} \left(\frac{y}{\varrho}\right)^{2\mu} \left(\frac{x\varrho}{2}\right)^{\mu} Q_{\mu+1}^{(\pi\varrho)}}{\mu! \Gamma(\mu + 1/2) \Gamma(\lambda + 1 - \mu)}. \end{aligned} \right.$$

Diese Darstellung ist symmetrisch in bezug auf die Y -Achse, woraus wir ersehen, daß $\Phi_{1/2,0}$ auf beiden Seiten des Streifens denselben Wert haben wird. Ferner ist:

$$(11) \quad \frac{\partial \Phi_{1/2,0}}{\partial x} = 0; \quad x = 0; \quad |y| \geq a$$

und:

$$(12) \quad \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \frac{\partial \Phi_{1/2,0}}{\partial x} = \frac{1}{2}; \quad x = 0; \quad |y| \leq a,$$

d. h. auf der positiven Seite des Streifens. Auf der negativen Seite ist:

$$(12a) \quad \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \frac{\partial \Phi_{1/2,0}}{\partial x} = -\frac{1}{2}; \quad x = 0; \quad |y| \leq a,$$

wodurch der notwendige Sprung auf dem Streifen erreicht wird.

Für $\varrho \rightarrow \infty$ ist:

$$(13) \quad \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \Phi_{1/2,0} = -\frac{q}{\sqrt{2\pi} x \varrho} e^{-i\pi\varrho} - \frac{i\pi}{4} \frac{\sin\left(\frac{qy}{\varrho}\right)}{\frac{qy}{\varrho}}.$$

Nun können wir auch schreiben:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \Phi_{1/2,0} &= \frac{x}{2\pi} \left\{ \int_0^{a+y} Q_0(x\sqrt{x^2+t^2}) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{a-y} Q_0(x\sqrt{x^2+t^2}) dt \right\} \end{aligned} \right.$$

Unter Beachtung von (8) und (14) setzen wir:

$$(15) \quad A = A_1 + A_2;$$

wobei:

$$(16) \quad A_1 = \frac{ix}{2\pi} \int_0^{a+y} Q_0(x\sqrt{x^2+t^2}) dt + \frac{xx}{2\pi} \int_0^{a+y} \frac{Q_1(\sqrt{x^2+t^2}) dt}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

und:

$$(17) \quad A_2 = \frac{ix}{2\pi} \int_0^{a-y} Q_0(x\sqrt{x^2+t^2}) dt + \frac{xx}{2\pi} \int_0^{a-y} \frac{Q_1(\sqrt{x^2+t^2}) dt}{\sqrt{x^2+t^2}}$$

bedeuten, oder in leicht verständlicher Weise, laut der Fig. 1, wobei die Winkel φ_1 und φ_2 positiv, im Sinne der Pfeile, zu rechnen sind:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 &= \frac{ix}{2\pi} \int_0^{r_1 \sin \varphi_1} Q_0(x\sqrt{r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + t^2}) dt \\ &\quad + \frac{xr_1 \cos \varphi_1}{2\pi} \int_0^{r_1 \sin \varphi_1} \frac{Q_1(x\sqrt{r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + t^2}) dt}{\sqrt{r_1^2 \cos^2 \varphi_1 + t^2}}. \end{aligned} \right.$$

Für A_2 ergibt sich ein analoger Ausdruck.

Es läßt sich (18) umformen wie folgt:

$$(19) \quad A_1 = \frac{i \sin \varphi_1}{2\pi} e^{-i\pi r_1 \cos \varphi_1} \int_0^{r_1} e^{it \cos \varphi_1} Q_0(t) dt - \frac{\varphi_1 e^{-i\pi r_1 \cos \varphi_1}}{2\pi}$$

Beachten wir nun, daß es sein wird:

$$(20) \quad \sin \varphi \int_0^\infty e^{it \cos \varphi} Q_0(t) dt = \begin{cases} i(\pi - \varphi); & \varphi > 0 \\ -i(\pi + \varphi); & \varphi < 0 \end{cases}$$

so können wir an Stelle von (19) auch schreiben:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 &= - \frac{e^{-i\pi r_1 \cos \varphi_1}}{2} \\ &- \frac{i \sin \varphi_1}{2\pi} e^{-i\pi r_1 \cos \varphi_1} \int_{\pi r_1}^{\infty} e^{it \cos \varphi_1} Q_0(t) dt; \quad \varphi_1 > 0. \end{aligned} \right.$$

Für $\varphi_1 < 0$ steht vor dem ersten Glied in (21) das Pluszeichen.

Wir erhalten demnach aus (15) innerhalb des geometrischen Schattens (φ_1 und φ_2 beide positiv), unter Beachtung, daß $r_1 \cos \varphi_1 = r_2 \cos \varphi_2 = x$ ist:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= - e^{-i\pi x} - \frac{i \sin \varphi_1}{2\pi} e^{-i\pi x} \int_{\pi r_1}^{\infty} e^{it \cos \varphi_1} Q_0(t) dt \\ &- \frac{i \sin \varphi_2}{2\pi} e^{-i\pi x} \int_{\pi r_2}^{\infty} e^{it \cos \varphi_2} Q_0(t) dt; \quad \varphi_1 > 0; \varphi_2 > 0. \end{aligned} \right.$$

Außerhalb des geometrischen Schattens, also im Licht ($\varphi_2 > 0$ und $\varphi_1 < 0$ oder umgekehrt), fällt das erste Glied in (22) rechterseits weg, wodurch wir demnach den Sprung auf die geometrische Schattengrenze verlegt hätten.

Dieses haben wir durch die Einführung der Funktion (20) erreicht, während die Ausdrücke (18) und (19) an der geometrischen Schattengrenze stetig sein werden.

Gehen wir nun zu dem Spalt über, so ersehen wir auf Grund analoger Überlegungen wie im vorigen Paragraphen, daß wir für \mathfrak{M} und \mathfrak{N} dieselben Ausdrücke (4) erhalten, nur daß wir dann nicht längs des Spaltes, sondern längs der beiden Halbebenen, die den Spalt bilden, integrieren müssen.

Ergänzen wir nun diese Integrale durch solche längs dem Spalt, so ergibt sich, ähnlich wie im vorigen Paragraphen, unter Beachtung, daß es:

$$(23) \quad \int_0^{\infty} Q_0(x R) dl = \frac{i\pi}{2x} e^{-i\pi x}$$

sein wird, für die entsprechenden Werte \mathfrak{E}' und \mathfrak{H}' der gebeugten Welle:

$$(24) \quad \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'' = 0; \quad \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'' = 0,$$

wobei \mathfrak{E}' und \mathfrak{H}' durch die Ausdrücke (8) gegeben sein werden.

Für die gesamte elektrische bzw. magnetische Kraft erhalten wir nun im Schatten:

$$(25) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}''; \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}''$$

und im Licht:

$$(26) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}''; \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}''.$$

§ 5. Addition der Beugungserscheinungen und das Babinetsche Theorem.

Wir denken uns in der YZ Ebene in § 3 irgendwo noch eine andere kreisrunde Scheibe. Dieselbe können wir entsprechend der ersten untersuchen, indem wir in dem Mittelpunkt der zweiten Scheibe ein dem früheren paralleles Koordinatensystem legen. Es folgt dann augenscheinlich, daß die Werte \mathcal{E} und \mathcal{H} der ersten Scheibe auf die Sprungwerte der zweiten ohne Einfluß sein werden, da diese Werte außerhalb der ersten Scheibe stetig sind. Umgekehrt wird die zweite Scheibe auf die Sprungwerte der ersten nicht wirken.

Es addieren sich also einfach die entsprechenden Größen der entsprechenden gebeugten Wellen der beiden Scheiben.

Es ist nun klar, daß diese Addition richtig sein wird auch für beliebig viele und verschiedene Scheiben, die irgendwo in der YZ -Ebene gelegen sein werden.

Gehen wir jetzt zu dem komplementären Schirm über, d. h. zu einer schwarzen Ebene mit solchen Öffnungen, die den obigen Scheiben entsprechen, so ist leicht zu ersehen, daß wir die Integrale \mathfrak{M} und \mathfrak{N} immer für die volle YZ -Ebene ergänzen können, woraus sich dann wieder die Beziehungen (19) § 3 ergeben.

Wir schreiben nun $qV_{0,1,0}(q, x, \varrho)$ an Stelle von $qV_{0,1,0}$ und wollen jetzt die Beugung an einem schwarzen Ring besprechen mit dem äußeren Radius a_2 und dem inneren a_1 . Hierbei ergibt sich die Lösung für \mathcal{E} und \mathcal{H} der gebeugten Welle einfach aus (8) § 3, falls wir dort an Stelle von $qV_{0,1,0}$ die Differenz:

$$(1) \quad q_2 V_{0,1,0}(q_2, x, \varrho) - q_1 V_{0,1,0}(q_1, x, \varrho)$$

einführen. Denn innerhalb des Ringes ($x = 0$; $\varrho < a_1$) werden die Sprungwerte, welche vom ersten Glied in (1) abhängen, von denjenigen des zweiten Gliedes gerade aufgehoben.

Auf der Ringfläche ($x = 0$; $a_2 > \varrho > a_1$), beim Durchgang durch dieselbe werden die Werte, welche von dem zweiten Glied in (1) abhängen, stetig sein und es bleiben nur die Sprünge des ersten Gliedes übrig.

Außerhalb des Ringes ist alles stetig.

Gehen wir nun zu dem komplementären Schirm, d. h. zu einer schwarzen Ebene mit einer ringförmigen Öffnung über, so erhalten wir wieder die Beziehungen:

$$(2) \quad \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'' = 0; \quad \mathfrak{H}' + \mathfrak{H}'' = 0,$$

welche wir als den Ausdruck für das *Babinetsche Theorem* ansehen können.

Es ist nun einleuchtend, daß wir nicht nur kreisrunde Scheiben bzw. Ringe, sondern auch verschiedene Streifen oder Scheiben von beliebiger Form annehmen dürfen. Wir erhalten dann immer bei dem Übergang zu dem komplementären Schirm und bei der Ergänzung der Integrale \mathfrak{M} und \mathfrak{N} zu der vollen YZ -Ebene, die einfallende Welle mit dem negativen Vorzeichen.

Also auch in diesem allgemeinen Fall wird das Babinetsche Theorem bei den Kottlerschen Sprungwerten erfüllt.

Was die Addition der Beugungserscheinungen anbelangt, so wird dieselbe immer möglich sein, falls die einfallende Welle von solcher Beschaffenheit sein wird, daß sie, wenn wir uns den beugenden Schirm wegdenken, im positiven Halbraum den Bedingungen (16) oder (17) § 2 genügt, da sie dann immer durch (11) bis (15) § 2 ausdrückbar sein wird.

Ferner gilt diese Addition, wie aus dem anfangs dieses Paragraphen Gesagten hervorgeht, nicht nur für die Kottlerschen Sprungwerte, sondern für beliebige *feste* Sprungwerte.

Im letzteren Fall braucht aber, wie wir in § 8 sehen werden, das Babinetsche Theorem *nicht* erfüllt zu sein.

Andererseits kann dieses Theorem auch bei anderen Sprungwerten, als den Kottlerschen (vgl. § 8) erfüllt sein und endlich noch bei anderen Bedingungen, woraus wir ersehen, daß die Erfüllung des Babinetschen Theorems keine spezifische Eigenschaft der Kottlerschen Sprungwerte sein wird (vgl. §§ 9 und 15).

§ 6. Beugung an einem Gitter.

Als weiteres Beispiel, auf welches wir später zurückkommen werden, der Addition der Beugungserscheinungen, be-

trachten wir ein Gitter, welches aus unendlich vielen Streifen besteht (ist also unendlich breit), die in der YZ -Ebene liegen und parallel der Z -Achse sind (Fig. 2).

Die Streifenbreite ist $2a$ und die Spaltbreite $2b$. Bezeichnen wir die Gitterkonstante durch p , so folgt demnach:

$$(1) \quad p = 2a + 2b.$$

Auch hier werden wir die elektrische Kraft parallel der Z -Achse annehmen. Da laut Figur die X -Achse einen Streifen halbiert, so wird die gesamte elektrische Kraft in bezug auf diese Achse symmetrisch sein.

Berücksichtigen wir ferner, daß alles längs der Y -Achse periodisch mit der Periode p sein wird, so erhalten wir für die gesamte elektrische Kraft \mathfrak{E} für den positiven Halbraum, also hinter dem Gitter¹⁾:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} = & \mathfrak{t} \sum_{n=0}^{n=r} C_n e^{-i n z} \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{p}\right)^2} \cos \frac{2\pi n y}{p} \\ & + \mathfrak{t} \sum_{n=r+1}^{\infty} C_n e^{-n z} \sqrt{\left(\frac{n\lambda}{p}\right)^2 - 1} \cos \frac{2\pi n y}{p}, \end{aligned} \right.$$

wobei r die größte ganze Zahl bedeutet, für welche noch gilt:

$$(3) \quad \left(\frac{r\lambda}{p}\right)^2 \leq 1.$$

1) W. v. Ignatowsky, Zur Theorie der Gitter. Ann. d. Phys. 44. S. 398 ff. 1914.

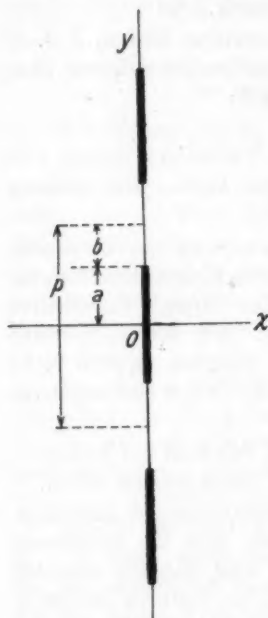


Fig. 2.

Aus den Ausführungen des vorigen Paragraphen ist nun klar, daß wir den Wert (2) für \mathfrak{E} aus (7) § 4 erhalten, wobei unter \mathfrak{E}' die Summe der Ausdrücke (8) § 4 über alle Streifen zu nehmen ist.

Demnach können wir in leicht verständlicher Weise schreiben:

$$(4) \mathfrak{E} = \mathfrak{I} \left\{ e^{-i\pi x} + i \sqrt{\frac{9}{2\pi}} \sum \Phi_{1/2,0} - \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \sum \Phi'_{1/2,0} \right\}.$$

Aus (2) und (4) ergeben sich folgende Werte für die C_n :

$$(5) \begin{cases} C_0 = \frac{b}{a+b}; & C_n = -\frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n a}{a+b} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{p}\right)^2}} \right\}; \\ 1 \leq n \leq r \end{cases}$$

und

$$(6) \quad C_n = -\frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n a}{a+b} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n\lambda}{p}\right)^2 - 1}} \right\}; \quad n > r.$$

Diese Werte sind vollkommen exakt, wobei für $\Phi_{1/2,0}$ mit dem Ausdruck (14) § 4 gerechnet worden ist, bei welchem also der Sprung auf dem Streifen liegt.

Um nun hier die Erfüllung des Babinetschen Theorems zu zeigen, wollen wir dasselbe vorerst ein wenig anders formulieren, und zwar:

„Ist das Babinetsche Theorem erfüllt, so ist im positiven Halbraum die Summe der gesamten elektrischen bzw. der magnetischen Kräfte für einen Schirm und einem ihm komplementären, abzüglich der einfallenden elektrischen bzw. magnetischen Kraft, gleich Null.“

Es ist nun klar, leicht einzusehen, daß sich diese Formulierung mit der Beziehung (2) des vorigen Paragraphen deckt.

Zwecks Überganges von unserem Gitter zu einem ihm komplementären, vertauschen wir einfach in (2) a und b miteinander und setzen außerdem $y + \frac{p}{2}$ an Stelle von y . Addieren wir dann die so erhaltene elektrische Kraft zu (2) und ziehen von dieser Summe \mathfrak{E}_0 ab, so erhalten wir tatsächlich Null.

§ 7. Einige Folgerungen.

Aus den Ausführungen des § 3 wissen wir, daß in (18) § 3 bei der Berechnung der Werte von \mathfrak{E}'' und \mathfrak{H}'' mit Hilfe von (7) § 1, die Größen \mathfrak{M} und \mathfrak{N} sich ausdrücken durch:

$$(1) \quad \mathfrak{M} = -\frac{k}{4\pi} \int_f \frac{e^{-i\pi r}}{r} df; \quad \mathfrak{N} = \frac{j}{4\pi c} \int_f \frac{e^{-i\pi r}}{r} df,$$

wobei f die Oberfläche der Öffnung bedeutet. Wegen (4) § 3 folgt nun statt (1):

$$(2) \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi} \int_f \frac{[n \mathfrak{E}_0] e^{-i\pi r}}{r} df; \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{4\pi} \int_f \frac{[n \mathfrak{H}_0] e^{-i\pi r}}{r} df,$$

weshalb wir folgendes aussagen können:

Setzen wir in (8) § 1 für die entsprechenden tangentialen Komponenten diejenigen der einfallenden Welle und integrieren *nur* über die Öffnung, so ergeben uns die Gleichungen (7) § 1 die richtigen Werte für \mathfrak{E}'' und \mathfrak{H}'' des § 3. Gehen wir nun zu dem komplementären Schirm, d. h. zur Scheibe über, so wird sich f in (2) auf die gesamte YZ -Ebene, mit Ausschluß der Scheibe beziehen.

Nach dieser einleitenden Bemerkung wenden wir uns zu dem Kirchhoffschen Integral (4) § 2.

Die ältere Beugungstheorie, welche nur mit einer, und zwar skalaren Größe operiert, verfährt nun bei der Untersuchung der Beugungserscheinungen bekanntlich derart, daß sie in eben erwähnten Integral *nur* längs der Öffnung integriert und dort für u und $n \nabla u$ diejenigen Werte einsetzt, welche der einfallenden Welle entsprechen.

Berechnet man nun das so modifizierte Integral exakt und nicht, wie es gewöhnlich in den Lehrbüchern steht, mit einer Annäherung, welche Kottler (Arb. A S. 454) als wild bezeichnet, so erhält man auf der Schattenseite des Schirmes nicht die Werte $u = n \nabla u = 0$, denn das würde ja dem ersten Satz in § 2 widersprechen. Ebenfalls erhält man in der Öffnung nicht die angenommenen Werte für u und $n \nabla u$.

Dafür erhält man auf der Schirmfläche die Kottlerschen Sprungwerte (Arb. A).

Übertragen wir diese Auffassung auf die Maxwell'schen Gleichungen, so heißt dies, daß wir die entsprechenden tangen-

tialen Komponenten in der Öffnung gleich denjenigen der einfallenden Welle setzen und in den Ausdrücken (8) § 1 nur längs der Öffnung integrieren, laut den Ausführungen anfangs dieses §.

Es ergeben uns dann die Gleichungen (7) § 1 solche Werte für \mathfrak{E} und \mathfrak{H} , deren tangentialen Komponenten auf der Schattenseite des Schirmes selbstverständlich nicht verschwinden, denn das würde ja dem zweiten Satz des § 2 widersprechen. Ebenfalls erhalten wir in der Öffnung selbst nicht die angenommenen tangentialen Komponenten.

Dafür ergeben sich auf der Schirmfläche, wie aus den angeführten Beispielen erhellt, die Kottlerschen Sprungwerte.

Zusammenfassend können wir also sagen:

„Gehen wir von der älteren Auffassung der Beugungserscheinungen aus, so kommen wir zu den Kottlerschen Sprungwerten und umgekehrt ergeben uns die Kottlerschen Sprungwerte dieselben Resultate, wie die ältere Beugungstheorie.“

Der Unterschied besteht eben darin, daß, während die ältere Beugungstheorie *Randwerte* ansetzt, die durch die Lösung nicht befriedigt werden, und man hierbei zu gewissen Sprungwerten geführt wird, man umgekehrt bei der Annahme gewisser fester Sprungwerte eine solche Lösung erhält, die diese angenommenen Sprungwerte *exakt* erfüllen.

Daß man bei unendlich dünnen Schirmen immer zu Sprungwerten geführt wird, ist ja klar. Denn umschließen wir einen solchen Schirm mit einer Fläche F_2 laut (3) § 2, welche sich unendlich dicht an den Schirm anschmiegt, so kommen wir immer auf Sprungwerte, die, in die Ausdrücke (7) und (8) § 1 eingesetzt, uns immer die richtigen Werte für \mathfrak{E} und \mathfrak{H} ergeben, vorausgesetzt daß das entsprechende Beugungsproblem gelöst ist und wir die Sprungwerte kennen in Abhängigkeit von der Form und dem Material der Scheibe.

Es ist nun einleuchtend, daß diese Sprungwerte von dem Material des Schirmes abhängen werden (siehe folgenden Paragraph).

Ob nun die von Kottler eingeführten Sprungwerte, die insofern eine ausgezeichnete Stellung annehmen, als sie uns, wie aus dem obigen hervorgeht, eine Verbindung mit der

älteren Beugungstheorie schaffen, tatsächlich charakteristisch für „schwarze“ Schirme angesehen werden können, muß noch dahingestellt bleiben und wir kommen auf diese Frage im Teil II zurück (siehe ferner § 9).

Wir haben nun gesehen, daß sich die ältere Beugungstheorie mit sich selbst im Widerspruch befindet insofern, als die von ihr angesetzten *Randwerte* durch die Lösung nicht erfüllt werden.

Wollte man konsequent sein, so müßte man nicht von (4) § 2 ausgehen, sondern z. B. von (5) § 2. Denn setzen wir dort für u den Wert, welcher der einfallenden Welle entspricht, und überall auf der Schattenseite des Schirmes $u = 0$, so ergibt uns (5) § 2 eine Lösung, die tatsächlich den angenommenen Randbedingungen genügen wird. Es verschwindet aber $n \nabla u$ auf der Schattenseite des Schirmes nicht und in der Öffnung wird es nicht gleich dem entsprechenden Wert der einfallenden Welle sein.

§ 8. Einführung anderer Sprungwerte.

Statt der Kottlerschen Sprungwerte (4) § 3 setzen wir jetzt:

$$(1) \quad \mathfrak{D} = 0; \quad \mathfrak{C} = -2[n\mathfrak{H}_0] = -\frac{2}{c}j,$$

nehmen wieder einen unendlich dünnen Schirm in der YZ -Ebene an, vorläufig von beliebiger Form und erhalten dann für die gesamte elektrische bzw. magnetische Kraft aus (7) und (8) § 1:

$$(2) \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}'; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}',$$

wobei

$$(3) \quad \mathfrak{C}' = \frac{ie}{\pi} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{M}'; \quad \mathfrak{H}' = -\operatorname{rot} \mathfrak{M}'$$

und

$$(4) \quad \mathfrak{M}' = 0; \quad \mathfrak{M}' = -\frac{2j}{4\pi c} \int_f \frac{e^{-i\pi r}}{r} df$$

sein wird und die Integration längs der Fläche f der Scheibe zu führen ist.

Gehen wir nun zu dem komplementären Schirm über, so haben wir in (4) längs der ganzen YZ -Ebene, mit Ausschluß der entsprechenden Öffnung zu integrieren. Ergänzen wir nun

diese Integrale durch solche über die Öffnung, so erhalten wir, unter Beachtung von (14) § 2, für den positiven Halbraum:

$$(5) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}''; \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}'',$$

wobei sich \mathcal{E}'' und \mathcal{H}'' aus (3) berechnen, indem wir dort an Stelle von \mathcal{N}'' die Größe

$$(6) \quad \mathcal{N}'' = \frac{2i}{4\pi c} \int_f \frac{e^{-i\kappa r}}{r} df$$

setzen, wobei wieder f die Fläche der Öffnung, also dieselbe Fläche wie in (4) ist.

Da nun $\mathcal{N} + \mathcal{N}'' = 0$ sein wird, so ist das Babinetsche Theorem erfüllt.

Führen wir nun obige Ergänzung auch im negativen Halbraum aus, so ergibt sich:

$$(7) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - i e^{-i\kappa x_1} + \mathcal{E}''; \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \frac{i}{c} e^{-i\kappa x_1} + \mathcal{H}'',$$

falls, wie wir angenommen, die einfallende Welle durch (1) § 3 dargestellt ist.

Es ist dabei in (7) x_1 positiv nach links zu rechnen, d. h. wir erhalten im negativen Halbraum eine stehende Welle mit dem Knotenpunkt der elektrischen Kraft auf der YZ -Ebene, d. h. auf dem Schirm. Dieses, bzw. das Auftreten der zweiten Glieder in (7) erklärt sich dadurch, daß (6) beim Übergang in den negativen Halbraum sich nicht ändert.

Wir wollen nun diese Betrachtungen auf einen Streifen übertragen.

Die einfallende Welle sei durch (1) § 4 gegeben und wir setzen deshalb statt (1):

$$(8) \quad \mathcal{D} = 0; \quad \mathcal{E} = -\frac{2i}{c},$$

weshalb dann statt (4) und (5) § 4 folgt:

$$(9) \quad \mathcal{M} = 0; \quad \mathcal{N} = \frac{2i}{4\pi c} \int_l Q_0(\kappa R) dl = \frac{2i}{\kappa c} \sqrt{\frac{p}{2\pi}} \Phi_{1/2,0}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(10) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}'; \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'$$

mit den Werten:

$$(11) \quad \mathcal{E}' = i \cdot 2i \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \Phi_{1/2,0}$$

und

$$(11a) \quad \mathfrak{H}' = -i \frac{2}{c} \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \frac{\partial \Phi_{1/n,0}}{\partial x x} + i \frac{2}{c} \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \frac{\partial \Phi_{1/n,0}}{\partial x y}.$$

Da nun $\Phi_{1/n,0}$ auf beiden Seiten des Streifens gleiche Werte annimmt, so ersehen wir, unter Beachtung von (12) und (12a) § 4, daß tatsächlich die angenommenen Sprungwerte durch die Lösung erfüllt sind.

Nun gehen wir zum komplementären Schirm, d. h. zu einem Spalt über.

Auf Grund der entsprechenden Ergänzungen erhalten wir dann erstens dieselben Werte (11), nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, und zweitens müssen wir über die ganze YZ Ebene integrieren, d. h. in (14) § 4 $a = \infty$ machen. Es ergibt sich dann wegen (23) § 4:

$$(12) \quad 2i \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \Phi_{1/n,0} \text{ } a = \infty = -e^{-inx}$$

und

$$(13) \quad \frac{\partial \Phi_{1/n,0}}{\partial x y_a = \infty} = 0; \quad -2 \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \frac{\partial \Phi_{1/n,0}}{\partial x x} = e^{-inx}; \quad a = \infty.$$

Demnach fließt aus (1) § 4:

$$(14) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}''; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}''$$

und

$$(15) \quad \mathfrak{E}'' + \mathfrak{E} = 0; \quad \mathfrak{H}'' + \mathfrak{H} = 0.$$

Das Babinetsche Theorem ist erfüllt und man erhält Übereinstimmung mit (5).

Dieses gilt für den positiven Halbraum.

Gehen wir nun zu dem negativen Halbraum über, so ersehen wir hierbei aus (14) § 4, daß für x immer der absolute Wert zu setzen ist. Demnach muß man, bei $a = \infty$, in (12) und (13) x_1 statt x setzen und vor (13) das Vorzeichen wechseln.

Für den negativen Halbraum folgt also:

$$(16) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - i e^{-inx} + \mathfrak{E}''; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 - \frac{i}{c} e^{-inx_1} + \mathfrak{H}''$$

was nun, wegen (1) § 4 in Übereinstimmung mit (7) sein wird.

Stellen wir nun wieder aus den obigen Streifen ein Gitter zusammen, so ergibt sich für die Koeffizienten C_n

$$(17) \quad \begin{cases} C_0 = \frac{b}{a+b}; & C_n = -\frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n a}{a+b}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{p}\right)^2}}; \\ 1 \leq n \leq r \end{cases}$$

und

$$(18) \quad C_n = -\frac{2i}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n a}{a+b}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n\lambda}{p}\right)^2 - 1}}; \quad n > r.$$

Wir werden noch statt (8) folgende Sprungwerte betrachten:

$$(19) \quad \mathfrak{D} = 0; \quad \mathfrak{E} = -\frac{f}{c}.$$

Für einen Streifen erhalten wir dann:

$$(20) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}'; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}',$$

wobei

$$(21) \quad \mathfrak{E}' = f i \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \Phi_{1/2,0},$$

und

$$(22) \quad \mathfrak{H}' = -\frac{i}{c} \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \frac{\partial \Phi_{1/2,0}}{\partial x} + i \frac{1}{c} \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \frac{\partial \Phi_{1/2,0}}{\partial x y}$$

bedeuten.

Für den Spalt ergibt sich im positiven Halbraum:

$$(23) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}''; \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}''$$

mit den Werten:

$$(24) \quad \mathfrak{E}'' = \frac{k e^{-inx}}{2} - \mathfrak{E}'; \quad \mathfrak{H}'' = -i \frac{e^{-inx}}{2c} - \mathfrak{H}'.$$

Im negativen Halbraum wird sein:

$$(25) \quad \mathfrak{E}'' = -\frac{f}{2} e^{-inx_1} - \mathfrak{E}'; \quad \mathfrak{H}'' = -i \frac{e^{-inx_1}}{2c} - \mathfrak{H}',$$

wobei die Werte \mathfrak{E}' und \mathfrak{H}' in (24) und (25) diejenigen aus (21) und (22) sind, die, wie wir sehen, die Hälfte der Werte (11) betragen.

Für das entsprechende Gitter ergibt sich:

$$(26) \quad \begin{cases} C_0 = \frac{2b+a}{2b+2a}; & C_n = -\frac{1}{2\pi n} \sin\left(\frac{\pi n a}{a+b}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{p}\right)^2}}; \\ 1 \leq n \leq r, \end{cases}$$

und

$$(27) \quad C_n = -\frac{i}{2\pi n} \sin\left(\frac{\pi n a}{a+b}\right) \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n\lambda}{p}\right)^2 - 1}}; \quad n > r.$$

Daß wir in (26) § 4 keine reflektierte Welle erhalten haben, wie in (16), liegt in den verschiedenen Sprungwerten und erklärt sich dadurch, daß bei der betreffenden Ergänzung (über welche wir in § 4, bei dem Übergang zu dem negativen Halbraum, d. h. im Licht, nicht gesprochen haben) in (26) § 4 das Glied $\frac{e^{-i\pi x_1}}{2} - \frac{e^{-i\pi x_2}}{2} = 0$ wegfällt.

Wie wir aus (24) ersehen, wird bei den Sprungwerten (19) das Babinetsche Theorem nicht erfüllt.

§ 9. Folgerungen aus dem vorhergehenden und Bemerkungen zu den Kottlerschen Sprungwerten.

Wir wenden uns jetzt zu der am Schluß des § 7 modifizierten Form der älteren Beugungstheorie, indem wir dieselbe auf die Maxwellschen Gleichungen übertragen. Dies bedeutet, daß wir die tangentialen Komponenten von \mathfrak{E} oder \mathfrak{H} in der Öffnung gleich denjenigen der einfallenden Welle annehmen und auf der Schattenseite des Schirmes gleich Null. Wir setzen also hierbei gewisse Randwerte und fordern, daß die Lösung dieselben erfüllt.

Wir nehmen wieder als einfallende Welle die Welle (1) § 4, betrachten einen Spalt und fordern, daß innerhalb desselben:

$$(1) \quad [n\mathfrak{H}] = [n\mathfrak{E}_0] = \frac{f}{c}$$

sei und auf der Schattenseite des Schirmes (1) gleich Null.

Wir haben, wie gesagt, jetzt Randwerte und da dieselben für die ganze YZ -Ebene gegeben sind, so können wir dieselben mit Hilfe von (14) § 2 erfüllen und erhalten:

$$(2) \quad \mathfrak{E} = \frac{2i\sigma}{\pi} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{R}; \quad \mathfrak{H} = -2 \operatorname{rot} \mathfrak{R},$$

wobei

$$(3) \quad 2\mathfrak{R} = 2f \frac{1}{4\pi c} \int \frac{e^{-i\pi r}}{r} df = -f \frac{2}{c\pi} \sqrt{\frac{q}{2\pi}} \Phi_{1/2, 0}$$

sein wird. D. h. aber, wir erhalten exakt dieselbe Lösung wie diejenige des vorigen Paragraphen bei den Bedingungen (8) für einen Spalt.

Demnach führt uns die modifizierte Auffassung der älteren Beugungstheorie zu den Sprungwerten (8) § 8 hier und umgekehrt führen diese Sprungwerte zu dieser modifizierten Theorie.

Wir haben also eine analoge Reziprozität, wie in § 7 für die Kottlerschen Sprungwerte und der ursprünglichen älteren Beugungstheorie.

Die von Kottler angenommenen Sprungwerte bezeichnet er als charakteristisch für einen schwarzen Schirm.

Wir können die Sprungwerte (8) § 8 als solche deuten, die für einen vollkommen reflektierenden Schirm charakteristisch sind, aber nur angenähert (dies folgt schon wegen des Auftretens einer stehenden Welle im negativen Halbraum).

Um dieses einzusehen, führen wir folgenden Satz an:

„Haben wir einen vollkommen reflektierenden unendlich dünnen ebenen Schirm (YZ -Ebene), so sind die tangentialen Komponenten der *gesamten* magnetischen Kraft auf den Teilen der YZ -Ebene, welche frei vom Schirm sind, gleich den entsprechenden Komponenten der einfallenden Welle, unabhängig von der Art der letzteren.“

Diesem Satz genügt die Sommerfeldsche Lösung für eine Halbebene, auch bei schiefer Inzidenz, ferner die Lösungen für eine kreisrunde Scheibe, eine ebensolche Öffnung, für einen Streifen und einen Spalt (vgl. Anmerkung am Schluß dieses Paragraphen).

Allgemein erhellt dieser Satz, unter anderem auch auf Grund der Überlegung, daß, unabhängig von der Art der einfallenden Welle, die tangentialen Komponenten der elektrischen Kraft der *gebeugten* Welle, auf beiden Seiten des Schirmes gleich und entgegengesetzt denjenigen der einfallenden Welle sein müssen. D. h. diese Komponenten der gebeugten Welle sind in bezug auf die YZ -Ebene symmetrisch.

Hieraus folgt nun, daß die tangentialen Komponenten der magnetischen Kraft der gebeugten Welle unsymmetrisch in bezug auf diese Welle sein werden. Demnach ergibt sich laut der allgemeinen Theorie der Wellengleichung (7) § 1¹⁾, daß die YZ -Ebene in den von dem Schirm freien Teilen eine Nullfläche für diese Komponenten sein wird. (Hierbei müssen wir bemerken, daß die Lösung für die gebeugte Welle, längs einer geschlossenen Kurve, die den Schirm *nicht* durchstößt, stetig und eindeutig sein muß.)

1) F. Pockels, a. a. O., S. 215ff.

Hieraus fließt nun der oben ausgesprochene Satz.

Nun ersehen wir aus der ersten Gleichung (11) und (15) § 8, unter Beachtung von (11) und (12) § 4, daß die tangentialen Komponenten der gesamten magnetischen Kraft in der Fläche des Spaltes, gleich denjenigen der einfallenden Welle sein werden, wie es ja auch auf Grund der obigen Randbedingungen sein muß. Zugleich ersehen wir aber, daß die Lösung des vorigen Paragraphen für diese Komponenten, auf der Schattenseite des Schirmes, den Wert Null ergibt.

Nun wird dies aber für einen Spalt, welcher aus zwei vollkommen reflektierenden Ebenen gebildet ist, nicht der Fall sein.

Vernachlässigen wir aber hierbei die entsprechenden schattenseitigen Teile der Integrale, was praktisch gestattet ist: Falls die Dimensionen der Öffnung groß im Verhältnis zur Wellenlänge sind, wir uns weit von der Öffnung befinden und endlich wir unter kleinem Beugungswinkel beobachten, so gelangen wir zu der Lösung des vorigen Paragraphen.

Auf das Gitter übertragen lauten obige Bedingungen:

- (4) a, b und p groß im Verhältnis zu λ ,
 und
 (5) $\frac{n\lambda}{p}$ klein gegen eins.

Auf Grund der Bedingung (4) allein erhält man für ein Gitter, welches aus vollkommen reflektierenden Streifen besteht (vgl. Anmerkung), an Stelle von (17) § 8:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} C_n = \frac{\sqrt{\frac{4\pi b}{\lambda} \left(1 - \frac{n\lambda}{p}\right)}}{2ie \frac{\pi}{\lambda} e^{\frac{i\pi na}{a+b}}} \int_0^{\sqrt{\frac{4\pi b}{\lambda} \left(1 - \frac{n\lambda}{p}\right)}} e^{-it^2} dt - \frac{ie^{-\frac{i\pi na}{a+b}}}{n\pi \sqrt{1 + \frac{n\lambda}{p}}} \end{aligned} \right.$$

Für $\frac{n\lambda}{p} = 1$ bleibt dieser Ausdruck endlich, während (17) § 8 dabei unendlich wird.

Bei der Bedingung (5) erhalten wir aus (17) § 8:

$$(7) \quad C_n = -\frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi na}{a+b}\right);$$

zu welchem Wert auch (6), bei der obigen Bedingung, führt.

Nun entspricht aber (5), da laut (4) λ/p klein sein wird, der Forderung, daß wir nur die ersten reellen Spektren berücksichtigen, d. h. aber bei kleinen Beugungswinkeln beobachten.

Aus dem angeführten Beispiel eines Gitters ersehen wir also nun, unter welchen Bedingungen uns die Sprungwerte (8) § 8 einen vollkommen reflektierenden Schirm definieren. Exakt tun sie dies auf jeden Fall nicht. Dies können wir aber nur deshalb behaupten, weil wir die Randbedingungen für vollkommen reflektierende Schirme kennen.

Für einen schwarzen Schirm kennen wir aber die Randbedingungen *nicht* und können deshalb nicht von vornherein behaupten, daß die Kottlerschen Sprungwerte einen solchen Schirm *exakt* charakterisieren werden.

Im Gegenteil werden sie es nach unserer Auffassung *nicht* tun.

Denn unter anderem folgt aus (5) § 6, welcher Ausdruck *exakt* ist, für $\frac{n\lambda}{p} = 1$ ein unendlich großer Wert.

Bei der Bedingung (5) geht (5) § 6 in (7) über und höchstwahrscheinlich werden auch die Bedingungen (4) im § 6 angenommen werden müssen.

Wie wir nun gesehen haben, ist eine Änderung der Sprungwerte mit einer Änderung der physikalischen Eigenschaften des Schirmes verbunden, d. h. mit dem Material desselben. So ergeben die Sprungwerte (19) § 8, falls wir in (24) oder (36) und (27) des vorigen Paragraphen $a = 0$ setzen:

$$(8) \quad \mathfrak{E}'' = \frac{1}{2} e^{-inx} = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_0.$$

D. h. einen teilweise durchlässigen Schirm.

Was für Sprungwerte tatsächlich einen schwarzen Schirm charakterisieren, können wir vorläufig im allgemeinen nicht angeben und kommen darauf in Teil II zurück.

Ferner haben wir gesehen, daß bei den Sprungwerten (8) § 8 ebenfalls das Babinetsche Theorem erfüllt sein wird. Die strenge Lösung zeigt, daß dieses Theorem z. B. bei einem vollkommen reflektierenden Streifen nicht erfüllt sein wird.

Angenähert aber, wie wir z. B. bei dem Gitter gesehen haben, bei den Bedingungen (4) und (5).¹⁾

1) Die von mir angeführten Integrale (9) § 3 und (9) § 10 sind Spezialfälle, des allgemeinen Integrals:

$$(a) \quad U_{\gamma, s, \nu} = -i \int_{1-i\infty}^1 \frac{e^{-i\pi x a} J_{\gamma}(xq\sqrt{1-\alpha^2}) J_s(q\sqrt{1-\alpha^2}) d\alpha}{(\sqrt{1-\alpha^2})^{s+\gamma-2\nu+1}},$$

welches seinerseits von einem noch allgemeineren Ausdruck abhängt.

Alle diese Integrale sind nun von mir in allen Details untersucht worden, in Verbindung mit verschiedenen Koordinatensystemen, als Unterlage für die Lösung der Beugung an einer kreisrunden Scheibe, einer ebensolchen Öffnung, an einem Streifen und Spalt (bei vollkommener Reflexion).

Es war deshalb von selbst geboten und auch leicht, die gewonnenen Resultate auf die Kottlersche Auffassung der schwarzen Schirme anzuwenden.

Da aber genannten Untersuchungen über 1000 Druckseiten betragen, so konnte ich hier, selbstverständlich, nur die Resultate anführen.

Es sei hierbei bemerkt, daß die Lommelschen Integrale und Reihen (E. Lommel, „Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Scheibe und einer kreisrunden Öffnung“, *Abh. d. bayer. Akad.* 15. S. 15ff. 1884.) aus dem obigen allgemeinen Integrale (a) folgen, indem sie letztere, angenähert, in gewissen Bezirken des Raumes und bei bestimmten Bedingungen [analog den vor (5) in diesem Paragraph angeführten] darstellen.

Zum Schluß möchte ich noch zu dem von P. Epstein in dem Enzyklopädieartikel, Bd. 5, Teil 3, Heft 3, S. 510 Gesagten noch folgendes bemerken.

Die dort angeführte Reihe s_a (244), welche Sieger für den Fall, daß die elektrische Kraft parallel dem Streifen ist, gebrauchte, ist nicht anwendbar, falls die magnetische Kraft parallel dem Streifen sein wird.

Dieses erhellt schon daraus, daß diese Reihe symmetrisch in bezug auf die ZX-Ebene der Fig. 30 ist, während doch nach dem Satz dieses die magnetische Kraft der gebeugten Welle, welche ja eben in diesem § Fall durch diese Reihe s_a dargestellt würde, auf der ZX-Ebene der Fig. 30 außerhalb des Streifens, verschwinden muß. Die Beziehung (246b) ist wohl richtig, nur muß dort eine andere Funktion $\Phi(u)$ stehen, als diejenige aus der Reihe (244).

Das Babinetsche Theorem ist nicht erfüllt.

II. Beugung an einer Halbebene.

§ 10. Die Energieströmung an der Halbebene bei den Kottlerschen Annahmen.

Als einfallende Welle nehmen wir wieder diejenige des § 4 an, d. h.:

$$(1) \quad \mathcal{E}_0 = \mathfrak{E} e^{-i\kappa x}; \quad \mathcal{H}_0 = -j \frac{e^{-i\kappa x}}{c},$$

welche sich also in Richtung des Pfeiles (Fig. 3) bewegen wird.

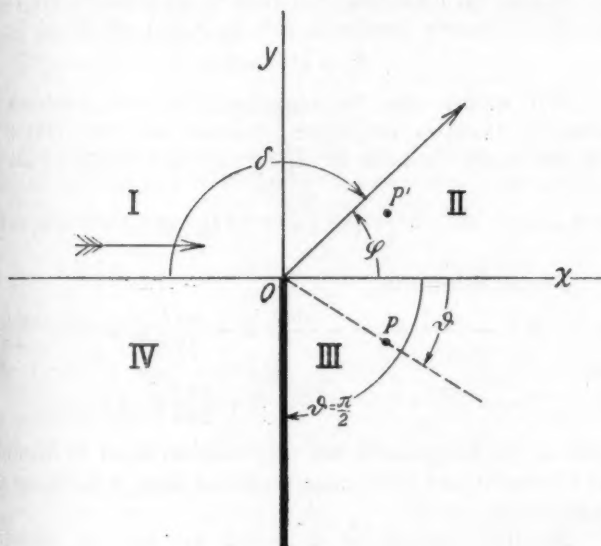


Fig. 3.

Um nun zu den Kottlerschen Formeln für die Halbebene zu gelangen, wenden wir uns zu § 4 und zwar zum Spalt und lassen die obere Halbebene ins Unendliche rücken. Hierbei brauchen wir, um den Wert von \mathcal{E} im Aufpunkt P zu berechnen, in der Fig. 1 § 3 nur $r_2 = \infty$ zu setzen, wobei $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ wird.

Wir erhalten dann aus (22) § 4, falls wir hinterher φ und r an Stelle von φ_1 und r_1 schreiben und beachten, daß dabei $r_2 \cos \varphi_2 = x$ bleibt:

$$(2) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + i \frac{\sin \varphi}{2\pi} e^{-i\pi x} \int_{\pi r}^{\infty} e^{it \cos \varphi} Q_0(t) dt,$$

oder, indem wir laut der Fig. 3 zu dem Winkel δ übergehen:

$$(3) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + i \frac{\sin \delta}{2\pi} e^{-i\pi x} \int_{\pi r}^{\infty} e^{-it \cos \delta} Q_0(t) dt.$$

Setzen wir nun hier $-\delta$ statt δ , so erhalten wir exakt den Kottlerschen Ausdruck, Arb. B, S. 495, Gl. (25 b):

$$\mathfrak{E}_r = u^* + u^B.$$

Wir werden aber im folgenden nicht den Ausdruck (3) anwenden, sondern denjenigen, welcher sich aus (19) § 4, bzw. aus einem ähnlichen für A_2 ergibt. Es folgt dann statt (3):

$$(4) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{ie^{-i\pi x}}{2\pi} \left\{ i \sin \delta \int_0^{\pi r} e^{-it \cos \delta} Q_0(t) dt + \delta \right\} = \mathfrak{E}_0 - iB.$$

Ferner haben wir:

$$(5) \quad R = -\frac{\sin \delta}{c} e^{-i\pi x} + \frac{\sin \delta}{c} B - \frac{\cos \delta}{2\pi c} Q_0(\pi r) - i \frac{Q_1(\pi r)}{2\pi c}$$

und

$$(6) \quad P = -\frac{\cos \delta}{c} e^{-i\pi x} + \frac{\cos \delta}{c} B + \frac{\sin \delta}{2\pi c} Q_0(\pi r),$$

wobei R die Komponente der magnetischen Kraft in Richtung von r bedeutet und P diejenige senkrecht dazu, in Richtung der Vergrößerung von δ .

Mit Hilfe von (4) bis (6) wollen wir nun die Energieströmung, auf Grund des Poyntingschen Vektors

$$\mathfrak{S} = \frac{[\mathfrak{E} \mathfrak{H}]}{4\pi}$$

berechnen.

Wir bezeichnen durch $\bar{W}(\delta, r)$ den zeitlichen Mittelwert der Energieströmung senkrecht zu r in Richtung der Vergrößerung von δ durch eine Fläche, welche durch die Höhe eins in Richtung der Z-Achse und der Länge r bestimmt wird.

Die folgenden Rechnungen sind vollkommen exakt ausgeführt und erst hinterher, wo notwendig, in $\bar{W}(\delta, r)$, $r = \infty$ gesetzt. Da aber diese Rechnungen ziemlich umständlich sind,

so geben wir hier nur die Resultate und führen nur als Beispiel an

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{W}(0, r) = & -\frac{w_0}{4\pi} - \frac{w_0}{4\pi} \left\{ \sin \pi r \cdot Y_0(\pi r) - \cos \pi r \cdot J_0(\pi r) \right\} \\ & + \frac{w_0}{2\pi} \int_0^{\pi r} Y_0(t) \cos t dt + \frac{i w_0}{2\pi} \int_0^{\pi r} J_0(t) e^{-it} dt, \end{aligned} \right.$$

wovon der reelle Teil zu nehmen ist. Hierbei bedeutet $w_0 = \frac{1}{8\pi c}$ den zeitlichen Mittelwert der Energieströmung der einfallenden Welle pro Flächeneinheit.

Für $r = \infty$ folgt dann:

$$(8) \quad \bar{W}(0, \infty) = -\frac{w_0}{4\pi}.$$

Die Energieströmung, senkrecht zur Y -Achse, welche nur von der einfallenden Welle herrührt, ist auf der Länge y dieser Achse gleich $w_0 y = w_0 r \left(\delta = \frac{\pi}{2} \right)$. Wir erhalten dann:

$$(9) \quad \left\{ \bar{W}\left(\frac{\pi}{2}, r\right) - w_0 r \right\}_{r=\infty} = -\frac{w_0}{4\pi} - \frac{w_0(4-\pi)}{16\pi\pi}$$

und analog:

$$(10) \quad \left\{ -\bar{W}\left(-\frac{\pi}{2}, r\right) - w_0 r \right\}_{r=\infty} = \frac{w_0}{4\pi} - \frac{w_0(4-\pi)}{16\pi\pi}.$$

Aus (4) ergibt sich:

$$(11) \quad \xi = 0; \quad \delta = 2\pi.$$

Demnach haben wir allgemein:

$$(12) \quad \bar{W}(2\pi, r) = 0.$$

Ferner folgt:

$$(13) \quad -\bar{W}(-2\pi, \infty) = \frac{w_0}{2\pi},$$

$$(14) \quad \bar{W}(-\pi, r) = \frac{3w_0}{2} \sqrt{\frac{r}{\pi}}; \quad r \rightarrow \infty,$$

$$(15) \quad \bar{W}(\pi, r) = \frac{w_0}{r} \sqrt{\frac{r}{\pi}}; \quad r \rightarrow \infty,$$

$$(16) \quad \bar{W}\left(\frac{3}{2}\pi, \infty\right) = \frac{w_0(4-\pi)}{16\pi\pi}.$$

Wir bezeichnen ferner den zeitlichen Mittelwert der Energieströmung, welche durch die Fläche eines Zylinders

von der Höhe eins, dessen Achse mit der Z-Achse zusammenfällt und dessen Fläche durch den Winkel δ_1 und δ_2 begrenzt wird, *herausströmt* durch $\bar{e}(\delta_1, \delta_2, r)$ und erhalten:

$$(17) \quad \left\{ \bar{e} \left(-\frac{\pi}{2}, 0, r \right) + w_0 r \right\}_{r=\infty} = \frac{w_0 (4 - \pi)}{16 \pi \kappa}$$

und

$$(18) \quad \left\{ \bar{e} \left(0, \frac{\pi}{2}, r \right) + w_0 r \right\}_{r=\infty} = \frac{w_0 (4 - \pi)}{16 \pi \kappa}.$$

Für einen Vollzylinder ergibt sich endlich:

$$(19) \quad \bar{e}(0, 2\pi, \infty) = -\frac{w_0}{4\kappa}.$$

§ 11. Kritik der Kottlerschen Behandlung der schwarzen Halbebene.

Die Kottlersche Lösung (3) § 10 ist unabhängig von dem Winkel ϑ der Fig. 3 der schwarzen Halbebene, wie dies aus den Ausführungen von Kottler folgt und wie man ja auch direkt ersehen kann, falls man ein beliebiges ϑ einsetzt und die Berechnung im Sinne eines Sprungwertproblems, laut dem § 2 ausführt.

Daß nun ϑ nicht gleich π sein kann (Kottler, Arb. A, S. 438, Anmerkung) ist klar, denn dann würde die schwarze Halbebene durch die Lichtquelle gehen. Daß aber hierbei Kottler auch den Fall $\vartheta = 0$ ausschaltet, ist nicht ohne weiteres einzusehen.

Denn die Beugung wird gerade wegen der Unabhängigkeit von dem Winkel ϑ nur durch die Z-Achse bedingt. Bei $\vartheta = 0$ wird nun die gesamte elektrische Kraft unbedingt symmetrisch in Bezug auf die ZX-Ebene sein müssen, d. h. in diesem Fall verschwinden die Sprungwerte für die elektrische Kraft. Da aber Kottler für diese Sprungwerte feste Werte einführt, die bei $\vartheta = 0$ nicht verschwinden (vgl. ferner § 14), so ist *tatsächlich für die Kottlersche Lösung* der Beugung an einer schwarzen Halbebene der Wert $\vartheta = 0$ auszuschalten, da hierbei diese Lösung ihren Sinn verliert.

Es ist wohl verständlich, daß die Beugung nicht von dem Winkel ϑ abhängen wird (wir kommen darauf noch im nächsten Paragraphen zurück), aber die Sprungwerte können sehr wohl von diesem Winkel abhängen, und eine entgegengesetzte Annahme von vornherein ist durch nichts begründet (vgl. § 14).

Aus dem obigen ersehen wir, daß die Kottlersche Lösung für die schwarze Halbebene unsymmetrisch in bezug auf die ZX -Ebene sein wird.

Diese Unsymmetrie und deshalb, nach unserer Auffassung, die Unwahrscheinlichkeit der Kottlerschen Sprungwerte als Charakteristik einer schwarzen Halbebene, geht noch klarer aus den Resultaten des vorigen § hervor, wobei wir, der Einfachheit halber, annehmen, daß laut Fig. 3 $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist.

Wir verfolgen nun die Gesamtströmung der Energie im ersten Quadranten der Fig. 3, welche von der Lichtquelle von links nach rechts strömt. Wie wir aus (8) § 10 ersehen, geht hiervon der Teil $w_0/4\pi$ in den vierten Quadranten über. Ein anderer Teil (von der gebeugten Welle her) verschwindet links oben im Unendlichen, wegen (18) § 10. Der Rest geht laut (9) § 10 durch die YZ -Ebene. Hiervon verschwindet ein Teil rechts oben im Unendlichen, der andere Teil (15) § 10, passiert die ZX -Ebene von oben nach unten, um wieder teilweise, rechts unten, im Unendlichen zu verschwinden, und andererseits Teil (16) § 10 teilweise durch die schwarze Halbebene in den vierten Quadranten des nichtphysikalischen Raumes zu gelangen. Da nun aber hier, wegen (11) und (12) § 10 die negative ZX -Ebene als vollkommen reflektierend anzusehen ist, so geht dieser Teil der Energie glatt an der ZX -Ebene vorbei und verschwindet links im Unendlichen.

Hierdurch hätten wir den Verlauf desjenigen Teiles der einfallenden Energie verfolgt, welcher im ersten Quadranten von der Lichtquelle einströmt. Diese Energie verschwindet nun insgesamt im Unendlichen im physikalischen, bzw. im nichtphysikalischen Raum, *abgesehen* von einem Teil $w_0/4\pi$, welcher in den vierten Quadranten übergeht.

Es wird deshalb die Energie, welche von der Lichtquelle in diesen Quadranten gesandt wird, um $w_0/4\pi$ vermehrt. Von dieser Energie verschwindet nun ein Teil (18) § 10, als Beugungswelle im Unendlichen links, und der Rest (10) § 10 gelangt durch die schwarze Halbebene in den dritten Quadranten des nichtphysikalischen Raumes. Dieser Rest geht aber nicht nach oben durch die ZX -Ebene, sondern im Gegenteil, es kommt von dort die Energie (14) § 10 und beide zusammen

verschwinden rechts unten im Unendlichen. Außerdem aber strömt von diesem oberhalb der X -Achse gelegenen nichtphysikalischen Raum, durch die negative ZX -Ebene (nach unten), die Energie (13) § 10.

Hieraus schließen wir, daß in diesem nichtphysikalischen Raum eine Lichtquelle vorhanden sein muß, was auch mit den Ausführungen von Kottler (Arb. A., S. 426) übereinstimmt.

Der Wert (19) § 10 für den Vollzylinder zeigt uns, daß die Energie $w_0/4\pi$ verloren geht. Diese ist aber gleich dem Teil, welcher, wie wir gesehen haben, von dem ersten in den vierten Quadranten übergegangen ist und dann durch die schwarze Halbebene im dritten Quadranten des nichtphysikalischen Raumes verschwand.

Hierdurch ist deutlich genug die Unsymmetrie der Kottlerschen Lösung gezeigt, welche zusammen mit der Notwendigkeit der Einführung einer Lichtquelle im nichtphysikalischen Raum und den Ausführungen des § 9 uns unwahrscheinlich macht die Kottlerschen Sprungwerte als charakteristisch für einen schwarzen Schirm anzusehen.

Wir werden deshalb im folgenden Paragraphen diejenigen Bedingungen aufstellen, welche nach unserer Meinung eine Halbebene erfüllen muß, um als *schwarz* gelten zu können.

§ 12. Aufstellung der charakteristischen Bedingungen der „Schwärze“ einer Halbebene.

Wir wenden uns zu der Fig. 3 und nehmen an, die Halbebene sei schwarz.

Hierbei setzen wir nun fest, daß die Beugungserscheinung nicht von dem Winkel ϑ abhängen soll. Diese Annahme wird auch durch die folgenden Überlegungen gerechtfertigt, genügt aber nicht zur Charakterisierung einer schwarzen Halbebene (vgl. § 14).

Übrigens ist dies auch bei Kottler für $\vartheta > 0$ der Fall.

Wegen dieser Unabhängigkeit wird z. B. bei einer Verkleinerung von ϑ ein Teil des nichtphysikalischen Raumes des dritten Quadranten der Fig. 3 in einen ebensolchen Teil des physikalischen Raumes umgewandelt.

Da aber hierbei sich nichts ändern soll, so kann zwischen physikalischem und nichtphysikalischem Raum kein Unterschied bestehen, nur daß der letztere durch die schwarze Halbebene von uns getrennt sein wird.

Deshalb müssen wir in plausibler Weise in beiden Räumen dieselben physikalischen Gesetze als gültig annehmen. (Vgl. die diesbezüglichen Ausführungen bei Kottler, Arb. A., S. 424 ff.)

Bei Annahme der einfallenden Welle (1) § 4 wird die elektrische Kraft, bei $\vartheta = 0$, in bezug zu der ZX-Ebene symmetrisch sein. Aber wegen der Unabhängigkeit von ϑ muß dies demnach für beliebige ϑ der Fall sein. Im allgemeinen wird, bei derselben Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle und bei einer beliebigen Lage der elektrischen Kraft derselben, die zur Z-Achse parallele Komponente der gesamten elektrischen bzw. magnetischen Kraft symmetrisch in bezug auf die ZX-Ebene sein.

Bei $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ wird der frühere physikalische Raum der dritten und zweiten Quadranten in einen nichtphysikalischen verwandelt und umgekehrt.

In einem Punkt P des dritten Quadranten der Fig. 3 des physikalischen Raumes seien die Gesamtwerte \mathcal{E} und \mathcal{H} vorhanden.

Wir nehmen nun einen Punkt P_1 im nichtphysikalischen Raum desselben dritten Quadranten, der unterhalb von P liegen soll (in der Figur nicht gezeichnet). Dort sollen die Werte \mathcal{E}_1 und \mathcal{H}_1 gelten.

Machen wir nun $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$, so vertauschen P , \mathcal{E} und \mathcal{H} einerseits und P_1 , \mathcal{E}_1 und \mathcal{H}_1 andererseits ihre Rollen, wie dies aus obigem hervorgeht.

Wir gehen jetzt über, die Beziehungen zwischen \mathcal{E} , \mathcal{H} und \mathcal{E}_1 , \mathcal{H}_1 aufzustellen, welche nach unserer Auffassung für eine „schwarze“ Halbebene charakteristisch sind.

Zu dem Zweck denken wir uns in der Fig. 3 noch eine zweite Halbebene, welche mit der positiven Richtung der X-Achse zusammenfallen soll, d. h. wir ergänzen unsere frühere schwarze Halbebene zu einer ganzen.

Dann wird aber die einfallende Welle restlos und ohne Beugung durch diese volle schwarze Ebene in den nichtphysikalischen Raum eintreten, was ja dem Begriff einer vollen schwarzen Ebene entspricht, und es werden *überall* die Werte \mathcal{E}_0 und \mathcal{H}_0 der einfallenden Welle vorhanden sein.

Betrachten wir nun die beiden Halbebenen und die bzw. Beugungserscheinungen separat und beachten hierbei, daß die beiden nichtphysikalischen Räume des dritten und zweiten Quadranten zu einem einzigen nichtphysikalischen Raum vereinigt werden, so müssen wir, laut dem eben Gesagten schließen, daß es sein wird:

$$(1) \quad \mathcal{E} + \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0; \quad \mathcal{H} + \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0,$$

wodurch die gesuchten Beziehungen gefunden wären.

Wir können aber auch von einer vollen Ebene ausgehen. Knicken wir dieselbe um die Z-Achse, so daß wir zwei Halbebenen bekommen mit einem stumpfen Winkel untereinander, der z. B. von der X-Achse halbiert wird. Wir können uns auch in diesem Fall keine andere Vorstellung machen, sobald wir beide Halbebenen als „schwarz“ voraussetzen, als daß auch jetzt *überall* die Werte \mathcal{E}_0 und \mathcal{H}_0 auftreten und keine Beugung entstehen wird.

Hierbei wird aber der Übergang zu einer separaten Behandlung jeder Halbebene plausibler, und wir erhalten dann dieselben Beziehungen (1) und man ersieht zugleich die Unabhängigkeit von dem Winkel ϑ .

Wir kehren nun zu unserer schwarzen Halbebene zurück.

Beachten wir nun, daß dieselbe auch durch den Punkt P der Fig. 3 durchgehen kann, wodurch ja nichts geändert wird, so werden in den Beziehungen (1) \mathcal{E} und \mathcal{H} die Werte der elektrischen bzw. magnetischen Kraft auf der Schattenseite der Halbebene \mathcal{E}_1 und \mathcal{H}_1 die entsprechenden Werte auf der belichteten Seite der Halbebene darstellen.

Die Bedingungen (1) treten darnach an Stelle der Kottlerschen Sprungwerte, als Charakteristikum der schwarzen Halbebene.

Außer diesen Bedingungen muß selbstverständlich die Lösung so beschaffen sein, daß die einmal durch die schwarze Halbebene in den nichtphysikalischen Raum eingetretene Energie

nicht wieder in den physikalischen Raum gelangen wird. Ferner muß, z. B. im dritten Quadranten der Fig. 3, in genügender Entfernung von der X-Achse vollkommene Dunkelheit herrschen usw.

Fassen wir alles zusammen, so ersehen wir, daß wir die Lösung z. B. für eine schwarze Halbebene nicht unmittelbar hinschreiben können, wie bei den Kottlerschen Sprungwerten (oder überhaupt bei gegebenen Sprungwerten), denn durch die Beziehungen (1) sind eben keine Sprungwerte festgelegt.

Hieraus folgt, daß wir keine Addition der Beugungserscheinungen im Sinne des § 5 ausführen können, genau wie bei den blanken Schirmen.

Wir müssen also für einen jeden Fall eine Lösung suchen (vgl. ferner § 15).

Obwohl die Lösung der Beugung für eine vollkommen reflektierende kreisrunde Scheibe und einen ebensolchen Streifen vorliegt (vgl. Anmerkung zu § 9), so ist es uns bis jetzt noch nicht gelungen, hiervon zu einer „schwarzen“ (in unserem Sinn) Scheibe bzw. Streifen überzugehen, wie dies Sommerfeld getan hat, indem er einfach in seiner Lösung für die blanke Halbebene das reflektierte Licht strich.

Er gelangte dabei zu einer zweiwertigen Lösung für die schwarze Halbebene, welche gerade allen obigen Bedingungen genügt, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden.

Demnach ist diese zweiwertige Sommerfeldsche Lösung diejenige, welche nach unserer Auffassung einer schwarzen Halbebene entspricht.

§ 13. Die Sommerfeldsche zweiwertige Lösung für die schwarze Halbebene.

Diese Sommerfeldsche Lösung lautet unter Beachtung der Fig. 3:

$$(1) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \frac{\mathfrak{f} e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} e^{-i\kappa x} \int_{\infty}^{\sqrt{2\pi r} \sin \frac{1}{2} \varphi} e^{-i\lambda^2} d\lambda = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{f} B,$$

wobei wieder als einfallende Welle die Welle (1) § 10 angenommen worden ist.

Für die Größe B in (1) können wir auch schreiben:

$$(2) \quad B = -\frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi x} \int_0^{\pi r} e^{it \cos \varphi} Q_{1/2}(t) dt - \frac{e^{-i\pi x}}{2}.$$

Berücksichtigen wir nun, daß es sein wird:

$$(3) \quad \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{it \cos \varphi} Q_{1/2}(t) dt = \begin{cases} -\frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \varphi}; & \varphi > 0, \\ \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \varphi}; & \varphi < 0, \end{cases}$$

so erhalten wir statt (2):

$$(4) \quad B = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\pi} e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi x} \int_{\pi r}^{\infty} e^{it \cos \varphi} Q_{1/2}(t) dt; \quad \varphi > 0.$$

Für $\varphi < 0$ kommt zu (4) noch das Glied $-e^{-i\pi x}$ hinzu. Hierdurch hätten wir den Sprung nach der geometrischen Schattengrenze verlegt.

Setzen wir nun in dem Integral (4) δ an Stelle von φ , so erhalten wir den Wert $v_{(3)}^B$ bei Kottler (Arb. B S. 502).

Gehen wir nun in (1) zu dem Winkel δ über, so ergibt sich:

$$(5) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{k} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi x}}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{\sqrt{2\pi r} \cos \frac{1}{2} \delta} e^{-i\lambda^2} d\lambda,$$

woraus dann für die Komponenten der magnetischen Kraft, analog (5) und (6), § 10 folgt:

$$(6) \quad R = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi x} \sin \delta}{c \sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{-\sqrt{2\pi r} \cos \frac{1}{2} \delta} e^{-i\lambda^2} d\lambda + \frac{i e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi r}}{c \sqrt{2\pi \pi r}} \sin \frac{1}{2} \delta$$

und

$$(7) \quad P = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi x} \cos \delta}{c \sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{-\sqrt{2\pi r} \cos \frac{1}{2} \delta} e^{-i\lambda^2} d\lambda + \frac{i e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi r}}{c \sqrt{2\pi \pi r}} \cos \frac{1}{2} \delta.$$

Ferner erhalten wir für die einfallende Welle auf der Halbebene bei einem Winkel $\vartheta \geq 0$:

$$(8) \quad \dots \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{k} e^{-i\pi x}; \quad R_0 = \frac{\sin \vartheta}{c} e^{-i\pi x}; \quad P_0 = \frac{\cos \vartheta}{c} e^{-i\pi x}.$$

Beachten wir nun, daß bei $\vartheta > 0$ auf der Schattenseite der Halbebene $\delta = \pi + \vartheta$ ist und auf der Lichtseite $\delta = -\pi + \vartheta$, so ist es leicht, auf Grund von (7) und (8) zu zeigen, daß die Beziehungen (1) des vorigen Paragraphen tatsächlich erfüllt sein werden.

Für die Sprungwerte (3) § 3 ergibt sich, falls wir auch hier die positive Normale zu der Halbebene nach der Lichtseite zu rechnen:

$$(9) \quad \mathfrak{D} = r_0 \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{2\pi r} \sin \frac{1}{2}\vartheta} e^{-i\lambda^2} d\lambda$$

und

$$(10) \quad \mathfrak{E} = -i \frac{2e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi x} \sin \vartheta}{c\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{2\pi r} \sin \frac{1}{2}\vartheta} e^{-i\lambda^2} d\lambda - i \frac{2ie^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi x} \cos \frac{1}{2}\vartheta}{c\sqrt{2\pi \pi r}},$$

wobei r_0 einen Einheitsvektor in Richtung von r bedeutet.

Aus (9) ersehen wir, daß der Sprung der tangentialen Komponente der elektrischen Kraft an der schwarzen Halbebene für $\vartheta = 0$ tatsächlich gleich Null wird, wie es die Symmetrie in bezug auf die ZX -Ebene erfordert.

Analog § 10 berechnen wir auch hier die Energieströmungen, wobei wir ebenfalls nur die Resultate anführen.

Da nun laut (6)

$$(11) \quad \dots R = 0; \text{ für } \delta = 0, 2\pi, -2\pi$$

sein wird, so erhalten wir allgemein

$$(12) \quad \bar{W}(0, r) = \bar{W}(2\pi, r) = \bar{W}(-2\pi, r) = 0.$$

Außerdem ist:

$$(13) \quad \bar{W}\left(\frac{\pi}{2}, r\right) = -\bar{W}\left(-\frac{\pi}{2}, r\right),$$

$$(14) \quad \bar{W}\left(\frac{3}{2}\pi, r\right) = -\bar{W}\left(-\frac{3}{2}\pi, r\right),$$

$$(15) \quad \bar{W}\left(\frac{\pi}{2}, r\right) = -\bar{W}\left(-\frac{\pi}{2}, r\right)$$

und

$$(16) \quad \bar{W}(\pi, r) = -\bar{W}(-\pi, r) = \frac{w_0}{2} \sqrt{\frac{r}{\pi \pi}}.$$

Ferner haben wir

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \left\{ \bar{W}\left(\frac{\pi}{2}, r\right) - w_0 r \right\}_{r=\infty} \\ = \left\{ -\bar{W}\left(-\frac{\pi}{2}, r\right) - w_0 r \right\}_{r=\infty} = -\frac{w_0}{4\pi\kappa} \end{aligned} \right.$$

und

$$(18) \quad \bar{W}\left(\frac{3}{2}\pi, \infty\right) = -\bar{W}\left(-\frac{3}{2}\pi, \infty\right) = \frac{w_0}{4\pi\kappa}.$$

Für die Zylinderoberfläche ergibt sich ferner endlich:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \left\{ \bar{e}\left(-\frac{\pi}{2}, 0, r\right) + w_0 r \right\}_{r=\infty} \\ = \left\{ \bar{e}\left(0, \frac{\pi}{2}, r\right) + w_0 r \right\}_{r=\infty} = \frac{w_0}{4\pi\kappa}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus ersehen wir folgendes:

Von dem Teil der Energie, welche im ersten Quadranten der Fig. 3 von der Lichtquelle herrührt, geht *nichts* in den vierten Quadranten über. Ein Teil $w_0/4\pi\kappa$ (19) dieser Energie geht links ins Unendliche und der Rest (17) in den zweiten Quadranten. Hiervon verschwindet ein Teil im Unendlichen und der andere Teil (16) geht in den zweiten Quadranten über. Dort verschwindet wieder ein Teil im Unendlichen und der Rest $w_0/4\pi\kappa$ (18) gelangt durch die schwarze Halbebene (für welche wir wieder der Einfachheit halber $\vartheta = \pi/2$ angenommen haben) in den nichtphysikalischen Raum des vierten Quadranten, um, da laut (11) und (12) die ZX -Ebene vollkommen blank ist, im Unendlichen zu verschwinden.

Auch bei der Kottlerschen Auffassung ist die ZX -Ebene im letzteren Quadranten des nichtphysikalischen Raumes blank, wie dies aus (12), § 10, erhellt.

Während aber bei der Sommerfeldschen Lösung die negative ZX -Ebene im nichtphysikalischen Raum des ersten Quadranten ebenfalls (wegen der Symmetrie) blank ist, wird dies bei Kottler nicht der Fall sein, wie dies sich aus (13) § 10 ergibt, welcher Ausdruck gerade die Energiemenge angibt, die dort durch diese Ebene fließt.

Diese Ergebnisse stimmen im allgemeinen mit den Ausführungen von Kottler (Arb. B, Nr. 11) überein.

Deshalb ist die Tabelle von Kottler (Arb. A, S. 454) nicht maßgebend für die Beurteilung der „Schwärze“, da dort nur die elektrischen Kräfte berücksichtigt worden sind.

Aus dem Obigen ersehen wir also, daß die oberhalb der X -Achse von der Lichtquelle einströmende Energie sich um die Kante der Halbebene im Sinne des Uhrzeigers windet (nur bis zur negativen ZX -Ebene des nichtphysikalischen Raumes des vierten Quadranten) und im Unendlichen verschwindet.

Ganz symmetrisch liegen die Verhältnisse, falls wir die Energie betrachten, welche unterhalb der X -Achse von der Lichtquelle aus zuströmt. Wir brauchen deshalb nicht näher darauf einzugehen.

Ferner ergibt sich, daß wir bei der Sommerfeldschen Lösung nicht nötig haben, in dem nichtphysikalischen Raum eine Lichtquelle anzunehmen.

Endlich ersehen wir aus (9), daß der Sprung \mathfrak{D} für die elektrische Kraft, die parallel der Kante ist, stetig in Null übergeht bei der Annäherung an die Kante.

Bei Kottler ist dies nicht der Fall, denn die entsprechenden Sprungwerte sind bei dem Winkel ϑ für die schwarze Halbebene gleich:

$$(20) \quad \mathfrak{D} = r_0 e^{-i\pi x}; \quad \mathfrak{E} = -f \sin \vartheta e^{-i\pi x}.$$

§ 14. Schlußbemerkungen zu den Kottlerschen Sprungwerten.

Die Sommerfeldsche Lösung für eine blanke Halbebene lautet, falls wir die einfallende Welle (1) § 4 absondern, unter Beachtung der Fig. 3, bei einem beliebigen Winkel ϑ und falls wir sofort zu dem Winkel δ übergehen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \frac{f e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} & \left\{ e^{i\pi r \cos \delta} \int_{\infty}^{V^{2\pi r} \cos \frac{1}{2}\delta} e^{-i\lambda^2} d\lambda \right. \\ & \left. + e^{i\pi r \cos (\delta + 2\vartheta)} \int_{\infty}^{-V^{2\pi r} \cos \frac{1}{2}(\delta + 2\vartheta)} e^{-i\lambda^2} d\lambda \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die entsprechenden Sprünge auf der Halbebene sind:

$$(2) \quad \mathfrak{D} = 0$$

und

$$(3) \quad \mathfrak{E} = -f \frac{4 \sin \vartheta e^{-i\pi x} e^{\frac{i\pi}{4}}}{c \sqrt{\pi}} \int_0^{V^{2\pi r} \sin \frac{1}{2}\vartheta} e^{-i\lambda^2} d\lambda - f \frac{4 i e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi r \cos \frac{1}{2}\vartheta}}{c \sqrt{2\pi x r}}.$$

Nun denken wir uns durch den Punkt P der Fig. 3 eine geometrische Ebene.

Diese belegen wir einmal mit den Kottlerschen Sprungwerten (20) § 13 das andere Mal mit den Sprungwerten (9) und (10), § 13 und endlich mit den Sprungwerten (2) und (3).

Mit Hilfe von § 2 erhalten wir dann im ersten Fall die Kottlersche Lösung (2) § 10, im zweiten Fall die zweiwertige Sommerfeldsche Lösung und endlich im dritten Fall die Lösung (1).

Wollen wir nun aus diesen drei Lösungen diejenige für eine schwarze Halbebene ermitteln, so fällt die dritte Lösung weg, da sie vom Winkel ϑ abhängt (abgesehen davon, daß wir wissen, daß diese Lösung einer blanken Halbebene entspricht).

Es bleiben also zwei Lösungen übrig, welche vom Winkel ϑ unabhängig sind. Daß dies bei der Kottlerschen Lösung der Fall ist, kann man mit Hilfe von § 2 direkt nachweisen, wie anfangs in § 11 schon bemerkt wurde.

Wir führten obige Beispiele an, um zu zeigen, daß die Unabhängigkeit vom Winkel ϑ eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung zur Definition einer schwarzen Halbebene ist.

Die Wahl zwischen den obigen zwei Lösungen entschieden wir zugunsten der zweiwertigen Sommerfeldschen Lösung aus Gründen, die wir noch einmal zusammenfassen wollen.

1. Die Kottlerschen Sprungwerte geben Veranlassung zu unendlich großen Werten der Amplituden beim Gitter in § 6. Da nun diese Sprungwerte allgemeine Gültigkeit beanspruchen und außerdem für die Halbebene, unserer Auffassung nach, nicht zu gebrauchen sind, so müssen wir sie auch allgemein verwerfen.

2. Bei der schwarzen Halbebene ergibt sich Unsymmetrie in bezug auf die ZX -Ebene und deshalb kein stetiger Übergang von ϑ zu $-\vartheta$, während bei der Sommerfeldschen Lösung Symmetrie herrscht und dieser Übergang stetig erfolgt.

3. Bei der Sommerfeldschen Lösung ist es nicht notwendig, wie bei der Kottlerschen, im nichtphysikalischen Raum eine Lichtquelle anzunehmen.

4. Die Beugungserscheinungen addieren sich im Sinne des § 5. Nun kann man sich aber nicht gut vorstellen, daß die Beugungswelle eines Schirmes auf den anderen Schirm nicht wirken soll, d. h. die obige Addition, exakt genommen, ist nicht verständlich.

Hierzu fügen wir noch folgendes bei:

Vergleichen wir die Kottlerschen Sprungwerte (20) § 13 mit denjenigen von (8) § 8, welche sich bei einem beliebigen Winkel ϑ schreiben:

$$(4) \quad \mathfrak{D} = 0; \quad \mathfrak{U} = -\frac{1}{c} \sin \vartheta \cdot e^{-inx},$$

so ersehen wir, daß hier $\mathfrak{D} = 0$ und \mathfrak{U} doppelt so groß ist wie bei Kottler.

In beiden Fällen ist das Babinetsche Theorem erfüllt.

Nach unserer Auffassung ist der Kottlersche Schirm kein schwarzer, sondern nur angenähert ein solcher. Ebenfalls stellt (4), wie wir wissen, nur angenähert einen blanken Schirm dar.

Jetzt vergleichen wir die Sprungwerte (9) und (10), § 13, mit (2) und (3). Auch hier wird im zweiten Fall $\mathfrak{D} = 0$ und \mathfrak{U} doppelt so groß sein wie im ersten Fall.

Nach unserer Auffassung haben wir im ersten Fall tatsächlich eine schwarze Ebene und im zweiten Fall wissen wir, daß es eine blanke Halbebene sein wird.

Daß die Kottlersche Lösung nach unserer Auffassung eine Annäherung für die schwarze Halbebene ergibt, ersieht man schon daraus, daß (9) und (10), § 13, für große r in die Kottlerschen Werte (2), § 13, übergehen.

Endlich geht \mathfrak{D} in (12), § 13, bei $r \rightarrow 0$ stetig in Null über, was auch erklärlich scheint, da die elektrische Kraft parallel der Kante ist, während bei Kottler diese nicht eintritt, wie aus (20), § 13, ersichtlich (siehe ferner den folgenden Paragraph).

§ 15. Betrachtungen über beliebige, unendlich dünne schwarze Schirme.

Wir denken uns jetzt in der YZ -Ebene beliebige unendlich dünne schwarze Scheiben gelegen, die also zusammen einen schwarzen Beugungsschirm bilden. Indem wir nun durch

eine dieser Scheiben von der Lichtseite aus durchgehen, gelangen wir in den entsprechenden nichtphysikalischen Raum. Dasselbe können wir auch bei einer anderen Scheibe tun.

Wir setzen nun fest, daß alle diese nichtphysikalischen Räume einen einzigen Raum bilden, und zwar wird dies der nichtphysikalische positive Halbraum sein.

Denken wir uns nun in diesen Raum, so werden uns obige Scheiben als Öffnungen erscheinen, d. h. wir werden den „komplementären“ Beugungsschirm „sehen“. Dieses deckt sich mit den Überlegungen von Kottler (Arb. A, Nr. 5 und 10), und wir nehmen an, daß wir dort die komplementäre Lichterscheinung „erblicken“, und zwar *dieselbe*, welche wir im positiven physikalischen Halbraum bei einem komplementären Schirm beobachtet hätten.

Wir müssen deshalb das Babinetsche Theorem auch in diesem allgemeinen Fall als erfüllt betrachten, was auf dasselbe herauskommt, als ob wir die Beziehungen (1) des § 12 auch hier als richtig annehmen.

Denn bezeichnen wir wie früher durch \mathcal{E} bzw. \mathcal{H} die gesamte elektrische bzw. magnetische Kraft im positiven physikalischen Halbraum für einen Punkt P , und durch \mathcal{E}_1 und \mathcal{H}_1 die entsprechenden Werte im nichtphysikalischen Halbraum für einen Punkt P_1 , welcher dem Punkt P entspricht, so ist laut dem Früheren

$$(1) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}',$$

wobei sich \mathcal{E}' auf die gebeugte Welle bezieht. Ferner ist auf Grund des Gesagten

$$(2) \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}''.$$

Setzen wir nun (1) und (2) bzw. die entsprechenden Ausdrücke für die magnetische Kraft in (1), § 12 ein, so ergibt sich eben das Babinetsche Theorem.

Wir müssen sofort ausdrücklich hervorheben, daß, wenn aus den Beziehungen (1), § 12, die Erfüllung des Babinetschen Theorems für den physikalischen und den nichtphysikalischen Raum folgt, wir dieses letztere nicht behaupten dürfen, falls genanntes Theorem im physikalischen Raum erfüllt sein wird.

Z. B. wissen wir, daß dies bei den Kottlerschen Sprungwerten der Fall ist. Nun ergibt sich aber aus (4), § 10, unter Beachtung des nach (8), § 13 Gesagten, für die rechte Seite von (1), § 12 nicht \mathcal{E}_0 , sondern der Wert $\mathcal{E}_0 - i \frac{\partial e^{-i\pi x}}{\pi}$. Dieses ist eben eine Folge der Kottlerschen Sprungwerte, welches Resultat ebenfalls gegen die Kottlersche Auffassung der Beugung an schwarzen Schirmen spricht.

Wie wir nun gesehen haben, führten uns die Beziehungen (1), § 12 bzw. das obige modifizierte Babinetsche Theorem, im Falle der schwarzen Halbebene, zu anderen Resultaten als die Kottlerschen Sprungwerte. Dies wird auch im allgemeinen der Fall sein.

Da nun, wie wir dies schon öfters betont haben, diese Beziehungen keine Sprungwerte darstellen, so genügen sie nicht zur Aufstellung einer eindeutigen Lösung und es müssen deshalb noch andere Bedingungen gegeben sein, die sich aus der Untersuchung der „Schwärze“ eines jeden Schirmes ergeben müssen, analog wie wir dies bei der schwarzen Halbebene gesehen haben.

So kommen wir z. B. bei einem Spalt, welcher aus zwei schwarzen Halbebenen gebildet ist, beim Umklappen der einen Ebene um 180° zu der Beugung an nur einer Ebene. Wird sich nun dieser Drehungswinkel aber wenig von 180° unterscheiden, so wird praktisch die Erscheinung wenig von der Beugung, nur an einer Ebene verschieden sein.

Allen diesen und noch anderen Umständen muß die Lösung für zwei Ebenen Rechnung tragen.

Wir ersehen ferner, daß wir durch Streichung des letzten Gliedes in (1), § 14, zu dem Ausdruck (5), § 13, gekommen sind. Hierbei müssen wir beachten, daß dieses gestrichene Glied nicht nur das reflektierte Licht darstellt, sondern auch die Abhängigkeit von dem Winkel ϑ enthält. Demnach führt uns die Streichung dieses Gliedes zu der geforderten Unabhängigkeit von dem Winkel ϑ , wobei auch die notwendige Symmetrie in bezug auf die ZX-Ebene erhalten wird.

Hätten wir die Lösung für zwei blanke Ebenen, so würde wahrscheinlich nach Streichung des reflektierten Lichtes eine solche Abhängigkeit vom Winkel übrig bleiben, welche den

oben geschilderten Verhältnissen entspricht. Es ist ja außerdem klar, daß beim Umklappen der einen blanken Ebene um 180° wir ebenfalls die Beugung nur an einer blanken Ebene erhalten müssen.

Im Anschluß an die Ausführungen des § 12 müssen wir zu dem Obigen noch hinzufügen, daß wir im nichtphysikalischen Raum keine Lichtquellen annehmen dürfen, denn in diesem Raum sollen ja dieselben Erscheinungen auftreten, wie im physikalischen Raum bei einem komplementären Schirm. Deshalb müssen auch im ersteren Raum dieselben physikalischen Gesetze angenommen werden wie im physikalischen Raum.

Alles zusammenfassend können wir also folgendes aussagen:

„Das Problem der Beugung an schwarzen Schirmen kann nicht als Sprungwertproblem bei vorher angegebenen Sprungwerten betrachtet werden, sondern es müssen die Bedingungen der ‚Schwärze‘ für jeden Schirm besonders untersucht werden, unter Innehaltung des Babinetschen Theorems für den nichtphysikalischen Raum.“

Anhang.

Erwiderung an F. Kottler.

In seiner Arb. B, S. 469—473 macht Kottler einige Bemerkungen zu meinen Arbeiten¹⁾, auf welche ich hier erwidern möchte.

In § 1 meiner Arbeit I, auf welche sich Kottler bezieht (S. 469, Anmerkung), rede ich nur von *geschlossenen* Oberflächen, was ich vorläufig auch jetzt tun werde. Auf *ungeschlossene* Oberflächen komme ich später zurück.

Nun führt Kottler mein Integral ((18), S. 469) an, welches ja nichts anderes ist, als das Integral 7), § 1 dieser Arbeit. Hätte nun Kottler von diesen Gleichungen den Rotor genommen, so wäre er unmittelbar zu den Gleichungen (9), § 1 dieser Arbeit gekommen, welche er als die Larmorschen bezeichnet. Übrigens ersehen wir aus § 1 dieser Arbeit, daß

1) W. v. Ignatowsky, „Diffraction und Reflexion abgeleitet aus den Maxwellschen Gleichungen“. Ann. d. Phys. 23. S. 875. 1907 (hier zitiert unter Arbeit I) und Fortsetzung, Ann. d. Phys. 25. S. 99. 1908 (hier zitiert unter Arbeit II).

diese Larmorschen Gleichungen in den Macdonalschen Gleichungen enthalten sind, denen in diesem Sinne die Priorität zukommt.

Beachtet man ferner den Zusammenhang aller Gleichungen des § 1 mit dem allgemeinen Ausdruck (6), § 1 dieser Arbeit, so scheint mir die Bemerkung von Kottler (S. 471): „Der Nutzen dieser Umformung (18b) der simplen Kirchhoffschen Formel . . . ist nicht einzusehen“ nicht zutreffend.

Ferner bemerkt Kottler (S. 469, oben): „Wir geben zuerst seine Formel und dann seine der Kirchhoffschen Interpretation nachgebildete Auffassung des Beugungsproblems für den schwarzen Schirm als eines Randproblems“ und weiter auf S. 470, oben: „Ignatowsky setzt lichtseitig beliebig vorgeschriebene Randwerte ein und betrachtet Schirme aus beliebigem nichtschwarzem Material, während er schattenseitig die Nullwerte von \mathcal{E} und \mathcal{H} beibehält.“

Hierzu möchte ich bemerken, daß meine zitierten Arbeiten nichts mit „schwarzen“ Körpern zu tun haben und auch nicht mit Körpern aus „beliebigem nichtschwarzem“ Material. Denn aus den Voraussetzungen des § 2, Arbeit I, geht klar hervor, daß ich nur *vollkommen reflektierende* Körper betrachte.

Ferner habe ich nicht auf der Schattenseite die Nullwerte für \mathcal{E} und \mathcal{H} angesetzt, sondern nur die entsprechenden schattenseitigen Integrale *vernachlässigt*, wie dies aus dem Schluß der Ausführungen des § 3, Arbeit I, folgt und ausführlich im § 8 der Arbeit II diskutiert wird.

Meine Arbeiten stellen eben eine angenäherte Lösung für *vollkommen* reflektierende Körper (dazu noch Zylinderkörper, d. h. ebenes Problem) dar im Sinne der Bedingungen, welche vor (4), § 9 dieser Arbeit angeführt sind.

Hieraus geht auch hervor, daß ich nicht mit ungeschlossenen Flächen operierte. Angenommen aber, ich hätte dies getan, falls man tatsächlich auf Grund einer angenäherten Lösung darauf schließen könnte.

Dann kämen, da ich die Gleichungen (7), § 1 dieser Arbeit anwende, die Linienintegrale $e^{(3)}$ und $h^{(3)}$ bei Kottler, S. 471, in Betracht, um den Maxwellschen Gleichungen zu genügen.

In diesen Integralen müßten aber nicht \mathcal{E}_0 und \mathcal{H}_0 stehen, wie bei Kottler, sondern die vollen Werte \mathcal{E} und \mathcal{H} , wie dies aus § 3, Arbeit I und § 8, Arbeit II folgt.

In diesem Fall spielen aber beide Integrale für uns keine Rolle.

Denn da wir es mit einem ebenen Problem zu tun haben (senkrecht zur Z -Achse), so verschwindet $\mathcal{H}^{(3)}$, falls die elektrische Kraft parallel der Z -Achse ist, da \mathcal{E} auf der Oberfläche eines vollkommen reflektierenden Schirmes gleich Null sein wird. Das Integral $\epsilon^{(3)}$ verschwindet aber einfach deshalb, weil \mathcal{H} senkrecht zum Linienelement sein wird.

Ist die magnetische Kraft parallel der Z -Achse, so verschwindet $\mathcal{H}^{(3)}$, weil jetzt \mathcal{E} senkrecht zu diesem Element sein wird. Aber auch $\epsilon^{(3)}$ kommt für uns nicht in Betracht, denn berechnen wir \mathcal{E} laut (2) § 1 aus \mathcal{H} , der Formel (9) Arb. II, S. 108, so erhalten wir bei den dortigen Annäherungen denselben Wert für \mathcal{E}_m .

Hieran anknüpfend will ich ein Beispiel anführen, aus welchem das Obige noch klarer hervortreten wird.

Nehmen wir nun an, ich hätte tatsächlich in meiner Arbeit mit ungeschlossenen Flächen operieren wollen. Dann kann man dem dort behandelten Fall folgende Fassung geben im Einklang mit den vorhergehenden Ausführungen.

Wir denken uns parallel der Z -Achse einen unendlich dünnen Halbzylinder mit der konvexen Seite zu der Lichtquelle gewendet und dem Radius g (entsprechend der Arbeit I, S. 886).

Nun belegen wir diesen Halbzylinder mit den Sprungwerten (4), § 14.

Dann verschwindet \mathcal{E} für $\vartheta = 0$, was dem Winkel $\varphi = \pi/2$ auf S. 887 (unten) meiner Arbeit I entspricht.

Diese Sprungwerte entsprechen vollkommen den von mir angenommenen Randwerten des § 3, Arbeit I, und wir erhalten dann dieselben Resultate wie in der Arbeit I, falls wir dort eine ebene einfallende Welle annehmen. Denn diese Sprungwerte entsprechen ja, wie wir in § 9 gesehen haben, einem blanken Schirm bei den Bedingungen, die vor (4), § 9, angeführt sind, welche Bedingungen gerade in meiner Arbeit erfüllt sind.

Deshalb haben meine zitierten Arbeiten prinzipiell nichts mit der Arbeit von Kottler bezüglich der Beugung an *schwarzen* Schirmen zu tun, analog wie die eben angeführten Sprungwerte, die *annähernd* für *blanke* Schirme gelten, verschieden sind von den Kottlerschen Sprungwerten, die einen *schwarzen* Schirm charakterisieren sollen.

Leningrad, Physikalisches Institut der Universität, im Juli 1925.

(Eingegangen 16. Juli 1925.)

2. *Über elektrische Ladungen in der Atmosphäre; von W. N. Obolensky.*

Die Frage über die Höhe des Ionisationsvermögens der atmosphärischen Luft sowie über den Ionengehalt, der für beide Vorzeichen einer Volumeinheit zukommt, hat eine wichtige Bedeutung für sämtliche sich in der Atmosphäre bildenden elektrischen Prozesse; dennoch kann diese Frage bis jetzt noch nicht als gelöst betrachtet werden. Die üblich bei elektrometeorologischen Beobachtungen benutzten Aspiratoren des Typus Ebert oder des vervollkommenen Typus Swann geben nur annähernde Werte der Anzahl der sich gewöhnlich bewegenden Ionen an und sind gänzlich ungeeignet schwer bewegliche Ionen, deren Anzahl, laut Langevin, Gockel, Pollock und andere, zuweilen 50mal und mehr den Betrag an gewöhnlich bewegenden Ionen übertrifft, zu registrieren. Unter solchen Bedingungen ist es unmöglich, aus den Differenzen zwischen der Anzahl der in einer Volumeinheit enthaltenen positiven und negativen Ionen, die mittelst Messungen mit solchen Instrumenten berechnet sind, sich eine einigermaßen annähernde Vorstellung über den Betrag an tatsächlich in der Atmosphäre vorhandenen freien oder Volumladungen zu machen. Von diesen Erwägungen ausgehend, wurden für die Messungen der atmosphärischen Volumladungen mehrere Methoden, die verschieden von dem obenerwähnten Verfahren sind, vorgeschlagen. Im Jahre 1882 hat hierzu Lord Kelvin¹⁾ auf dem Internationalen Kongresse auf die Möglichkeit hingewiesen die Luftelektrisation mittels eines Kollektors, der im Zentrum einer aus dünnem Drahtnetze gemachten und gut geerdeten Hülle sich befände, zu untersuchen. Der Kollektor wird mit einem Elektrometer verbunden und gibt also das Potential im Zentrum des Netzes. Dieses Potential ist offenbar

1) Conférence internationale pour la détermination des Unités électriques. S. 89. Paris 1882.

durch elektrische, innerhalb des Netzes enthaltenen Ladungen sowie durch die auf der inneren Fläche der Netzhülle sich setzenden elektrischen Ladungen bedungen. Nachdem das Potential inmitten der Hülle gemessen ist, kann der Durchschnittswert der Ladung, die auf die Volumeinheit der inneren Luft zukommt, ausgerechnet werden. Auf diese Weise wurde eine Reihe von Messungen seitens Chauveau¹⁾, Mache²⁾ und anderen ausgeführt. Die am sorgfältigsten verrichteten Beobachtungen, die ein ganzes Jahr währten, wurden von Kähler³⁾ auf dem Potsdamer Observatorium ausgeführt.

Eine zweite Methode hat im Jahre 1907 Daunderer⁴⁾ vorgeschlagen. Das Wesentliche dieser Methode besteht in der Messung der Intensität des elektrischen Feldes, mittelst Kollektoren, die auf drei Höhen, z. B. auf den Höhen von 0,1 und 2 m, aufgestellt werden. Auf Grund dieser Messungen kann die Volumladung mittelst der Poissonschen Gleichung berechnet werden. Diese Methode hat Daunderer während eines ganzen Jahres für Messungen in Oberbayern angewandt. Ebenso hat diese Methode, mit einer registrierenden Aufstellung, Norinder⁵⁾ für seine Beobachtungen in Upsala, die während zwei Jahren dauerten (1918—1920), ausgenutzt.

Eine dritte Methode, wie bereits erwähnt, besteht im Aspirieren der zu untersuchenden Luft durch einen Zylinderkondensator und in der Messung der spezifischen Ionenzahl für beide Vorzeichen; die Differenz zwischen beiden soll die freie Raumladung ergeben. Diese Methode hat Gockel⁶⁾ im Jahre 1917 wieder aufgenommen.

Alle drei erwähnten Methoden haben die oder jene Unvollkommenheiten und führten bis zur letzten Zeit oftmals zu widersprechenden Resultaten. In der Aufstellung von Kelvin muß tatsächlich die geerdete Netzhülle mit negativen

1) Chaveau, *Étude de la variation diurne de L'électricité atmosph.* II. Mémoires. S. 103. 1902.

2) R. Mache, *Physik. Zeitschr.* 4. S. 587. 1903.

3) R. Kähler, *Meteor. Zeitschr.* 40. S. 204. 1923.

4) A. Daunderer, *Dissertation*, München 1908; *Phys. Zeitschr.* 8. S. 181. 1907; 10. S. 113. 1909.

5) H. Norinder, *Geogr. Annal.* Heft I. Stockholm 1921 und S. 116, 1922; *Meteorol. Zeitschr.* 38. S. 117. 1922.

6) A. Gockel, *Neue Denkschriften der Schweiz. Naturw. Gesellschaft* 54. S. 1. 1917.

elektrischen Ladungen geladen sein, wobei diese Ladung sich in Zusammenhang mit der Variation des elektrischen Erdfeldes ändern muß. Beim Vorhandensein solcher Ladungen wird ein wesentlicher Vorrat von positiven Ionen inmitten des Netzes aspiriert, während den negativen Ionen der Zutritt innerhalb des Netzes wesentlich erschwert ist. Im Resultate der Messungen müssen also beträchtlich große positive Ladungen erhalten werden. Im Vergleich mit anderen Methoden gibt diese Methode tatsächlich bedeutend zu große positive Ladungen und zeigt beinahe keine negativen Ladungen, woselbst mit den anderen Methoden öfters auch negative Ladungen erhalten werden. Die Methode von Daunderer kann offenbar nur in dem Falle angewandt werden, wenn in der Poissonschen Gleichung die Derivanten des Potentials in horizontaler Richtung unbeachtet bleiben können, d. h. wenn die Dichte der elektrischen Ladung konstant ist; die Beobachtungen zeigen dagegen, daß diese Ladungen, besonders in des Tagesstunden während des Sommers, sehr variieren und daß man deswegen nicht die erwähnten horizontalen Komponente vernachlässigen darf. Was endlich die dritte Methode betrifft, so besteht hier die Hauptschwierigkeit darin, daß es beinahe unmöglich ist, alle, sogar die schwach beweglichen Ionen im Kondensator aufzufangen; es würden dazu sehr lange Zylinderkondensatoren und ein geräumiges Feld innerhalb des Kondensators notwendig sein. Bei bedeutender Potentialintensität auf den Einfassungen des Kondensators werden aber die Kraftlinien sehr gekrümmt und es entsteht gewöhnlich ein Ausblasen aus dem Kondensator derjenigen Ionen, die geradezu den Messungen unterliegen sollten.

Ich werde nicht eingehend bei den Resultaten der früheren, nach den beschriebenen Methoden ausgeführten Beobachtungen verweilen. Genügend ist es zu bemerken, daß die Methode von Kelvin fast ausschließlich positive und dabei beträchtlich große Werte ergibt. So z. B. hat Kähler für Potsdam den jährlichen Mittelwert als gleich $+0,58 \text{ ESE./m}^3$ gefunden, mit einem Maximum $+0,67$ für November, Januar und Februar und einem Minimum $+0,86$ für August. Gleichzeitig haben die Beobachtungen von Daunderer für Bayern im Sommer $+0,60$ und im Winter $-0,48$ ergeben, wobei der Jahrgang sich direkt als entgegengesetzt dem Jahresgange für Potsdam

aufweist. Norinder hat aus seinen Beobachtungen auf der Höhe von 0—2 m einen Durchschnittswert von $-0,05$ ESE./m³ und auf der Höhe von 1—3 m $-0,20$ (im Sommer $-0,11$ und im Winter $-0,29$) erhalten. Also bei Norinder überwiegen in einem erheblichen Grade die negativen Werte. Gockel hat den jährlichen Mittelwert für $\epsilon + = 0,32$ und für $\epsilon - = -0,33$ erhalten, im Durchschnitt erwies sich der Wert der freien Ladung gleich $-0,01$. Was die täglichen Variationen betrifft, so haben Kähler und Norinder erhöhte Werte in den Morgen- und Nachtstunden erhalten. Die erwähnten Unvollkommenheiten dieser Methoden und die Uneinigkeit der erhaltenen Resultate gaben uns Anlaß, die Messungen der elektrischen

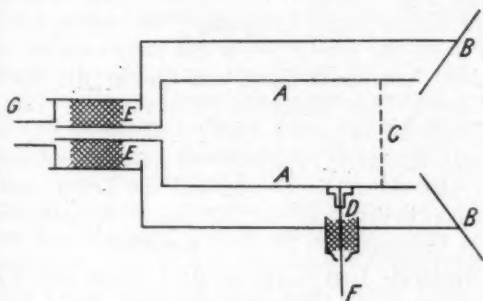


Fig. 1.

Raumladungen auf folgende Weise aufzustellen: die zu untersuchende Luft wird durch ein mit Filtern ausgefülltes Rohr aspiriert; die Filter haben den Zweck, sämtliche elektrische Ladungen aufzuhalten; das Rohr muß sorgfältig isoliert und von dem äußeren elektrischen Felde geschützt werden; außerdem wird das Rohr mit einem Elektrometer verbunden; dasselbe dient für Messungen der Ladungen, die in das Rohr beim Aspirieren der zu untersuchenden Luft eintreten.

Auf der Fig. 1 ist unser Apparat schematisch vorgeführt. Ein inneres Messingrohr AA , von einer Länge von 42 cm und einem Diameter von 12 cm ist sorgfältig durch zwei Bernsteine D und E von dem übrigen System isoliert und ist fast nach seiner ganzen Länge ziemlich dicht mit Watte gefüllt; im Rohr ist innerlich eine netzartige Messingscheibe C , die fest

an dem Wattenfilter gepreßt ist, eingeschaltet. Mittelst des Stiffes *F*, der durch den Bernsteinpfropfen durchgeht, ist das Rohr *AA* mit einem Elektrometer von Doležaleck (Sensibilität gegen 300 mm auf 1 Volt) verbunden. Das innere Rohr sowie der Elektrometer und sämtliche verbindenden Teile sind mit gut geordneten Metallschutzvorrichtungen überspannt.

Die zu untersuchende äußere Luft tritt in das Rohr *AA* durch einen Trichter *BB*, der fest zum Fenster auf der Höhe von etwa 1 m von dem Boden angepaßt ist, ein. Statt einer Glasscheibe ist im Fenster eine sorgfältig geerdete Metallscheibe eingesetzt; diese Metallscheibe ist mit einem runden Aufsnitte zum Einlassen der äußeren Luft versehen. Die Luft wird mittels einer Luftpumpe, die durch den Elektromotor in Bewegung gesetzt ist, in das Rohr aspiriert; man ließ die aspirierte Luft zuerst durch eine Gasuhr, die das Volumen der aspirierten Luft anmerkte, passieren; im Durchschnitte wurde in einer Minute von 1,5 bis 1,8 Kubikfuß Luft aspiriert. Um ein gleichmäßigeres Aspirieren der Luft zu erreichen, mußte die Luft, ehe sie in die Gasuhr und die Luftpumpe eintrat, durch einen zwischen Rohr und Luftpumpe eingestellten Kolben von einem Umfange von 20 Liter passieren.

Die aspirierte Luft wurde so stark durch den Wattenfilter aufgehalten, daß die Differenz zwischen dem Drucke der äußeren Luft und dem Drucke der aus dem Rohr austretenden Luft bis 60 mm an der Quecksilbersäule ausmachte. Provisorisch ausgeführte Versuche überzeugten uns, daß der Apparat vollständig vom äußeren elektrischen Felde geschützt sei; sogar während des Gewitters, wenn die Luft nicht aspiriert wurde und das ganze System isoliert war, blieb das Elektrometer in voller Ruhe. Um eine Überzeugung zu gewinnen, daß der Wattenfilter sämtliche mit der aspirierten Luft eintretende Ionen aufhält, wurden folgende Kontrollversuche ausgeführt: vor dem Apparate wurde ein zweites Rohr von gleicher Dimension und von gleicher Filterfüllung wie das Rohr *AA*, vorangesetzt. Eher die zu untersuchende Luft in den Apparat eintrat, sollte dieselbe zuerst durch dieses Vorderrohr passieren; die Versuche zeigten, daß dieses Ergänzungrohr alle Ladungen absorbierte und in das Rohr *AA* trat bereits nur neutrale Luft ein (wenigstens innerhalb der

Grenzen der Sensibilität des Elektrometers). Außerdem wurde durch eine Reihe von Versuchen festgesetzt, daß bei Abwechselung der Geschwindigkeiten, mit denen die zu untersuchenden Ladungen (innerhalb der Grenzen von 1,5 bis 2,5 Kubikfuß in der Minute) aspiriert wurden, der Elektrizitätsverhalt stets konstant blieb.

Die Beobachtungen wurden im Parke des Forstinstituts ausgeführt; vor dem Gebäude, auf dessen Südseite im ersten Stocke der Apparat aufgestellt war, liegt eine ziemlich große Wiese von ungefähr 2—3 Dessiatinen im Umfange, mit rasenbedecktem Boden und einem Blumenbeet belegt, sowie mit hohen undicht zerstreuten Bäumen des Parkes umrahmt. Jede Beobachtung bestand aus elf alle Minuten ausgeführten Ablesungen des Elektrometers und der Gasuhr; für jede Minute wurde die entsprechende Dichte der Ladung bestimmt und auch der mittlere Wert der Dichtigkeit für Perioden von 10 Minuten ausgerechnet. Bei starken Schwankungen der Ladungen wurde der Elektrometer jede 10 oder sogar 5 Sekunden abgelesen. Die Beobachtungen wurden ununterbrochen vom 1. September 1923 bis zum 30. September 1924 durchgeführt. An klaren Tagen wurden die Beobachtungen im Laufe der vollen 24 Stunden jede Stunde ausgeführt. Der Sommer des vergangenen Jahres war für diese Beobachtungen sehr günstig.

Dabei kann ich nicht umhin, dem Hrn. O. J. Makarenkoff und anderen Beobachtern des Meteorologischen Observatoriums des Forstinstituts, die öfters 24 Stunden abwechselnd am Apparate verweilten, für ihre mir stets bei meiner Arbeit erwiesene aktive Mithilfe meinen Dank auszusprechen.

Gegenwärtig ist das umfangreiche Beobachtungsmaterial, das 13 Monate umfaßt, bearbeitet worden. Die erhaltenen Hauptresultate sind hiernächst angegeben.

Wählt man nur niederschlagsfreie Tage, sowie diese Tage ohne starkem Nebel und überhaupt ohne heftige Luftperturbationen und dabei nur klare Tage aus, so wird ein scharf ausgeprägter täglicher Gang erhalten (Tab. 1). Dieser tägliche Gang ist verschieden für verschiedene Jahreszeiten; für bedeckte Tage behält der tägliche Gang im ganzen seinen Charakter nur mit einem etwas wenig scharfen Ausdrucke als für die klaren Tage. Es sei bemerkt, daß die in der Tabelle angeführten Zahlen in zehntausendsteln der absolut elektro-

Tabelle 1.

Täglicher Gang der Raumladungen.
(Die Ladungen sind in 10^{-4} ESE im Kubikmeter gegeben.)

	Mitter- nacht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Mittag
Januar	522	400	288	247	241	258	336	412	487	509	439	377	265
Februar	497	467	350	266	122	5	105	436	660	664	549	342	147
März	601	472	383	362	475	472	334	393	516	454	319	267	232
April	897	857	726	618	570	556	500	426	325	207	255	312	320
Mai	340	299	224	180	177	170	148	136	124	56	5	-14	-29
Juni	315	262	275	298	262	278	188	150	88	-10	-28	-73	-99
Juli	384	417	401	383	365	337	281	95	-188	-381	-428	-414	-417
August	456	451	414	368	325	254	169	70	-614	-1228	-1541	-1481	-1152
September	141	216	224	204	211	278	291	136	-82	-1546	-4606	-6421	-6319
Oktober	227	174	111	9	-93	-136	-91	-46	-38	32	126	138	95
November	424	395	359	329	295	263	273	303	350	388	404	338	219
Dezember	786	364	168	269	628	902	997	938	681	545	589	542	421
Jahr	466	398	327	294	298	303	294	287	192	-26	-326	-507	-526
Juli-Sept.	327	361	346	318	300	290	247	100	-295	-1052	-2192	-2772	-2630
Dez.-Febr.	602	410	268	260	330	388	479	595	609	573	526	420	277

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Tages- mittel
Januar	202	222	335	394	442	467	575	723	690	587	563	416
Februar	60	108	265	340	319	366	478	600	700	700	586	380
März	182	232	238	118	189	393	496	557	551	532	613	391
April	350	334	351	420	541	685	787	863	924	950	919	570
Mai	-48	-48	-47	-37	-17	6	78	205	257	275	314	115
Juni	-82	-88	-88	-61	-56	-20	43	91	174	343	411	107
Juli	-396	-373	-401	-466	-524	-510	-356	-123	83	241	329	-69
August	-908	-1103	-1388	-1411	-1378	-1399	-1096	-357	266	488	489	-471
September	-6645	-8167	-8954	-7323	-4387	-1907	-536	-113	-64	-8	71	-2304
Oktober	100	183	272	313	337	328	279	238	200	226	266	136
November	259	408	576	599	458	480	584	484	409	483	478	398
Dezember	482	721	804	808	753	845	1059	1134	1161	1339	1206	756
Jahr	-537	-631	-670	-526	-277	-22	199	359	446	513	520	35
Juli-Sept.	-2650	-3214	-3581	-3067	-2096	-1272	-663	-198	95	240	296	-946
Dez.-Febr.	248	350	468	514	505	559	704	819	850	875	785	507

statischen Einheiten auf einen Kubikmeter (10^{-4} ESE im Kubikmeter) gegeben sind.

Untersuchen wir einen der Wintermonate, z. B. Januar. Wie es aus der Tabelle und der Fig. 2 zu ersehen ist, ist für diesen Monat ein scharf ausgedrückter doppelter täglicher Gang vorhanden, mit zwei Maximis um 9 Uhr früh ($0,0509$ ESE/ m^3) und um 8 Uhr abends ($0,0723$) und zwei Minimis um 4 Uhr

morgens (0,0241) und um 1 Uhr nachmittags (0,0202). Im Durchschnitt erhalten wir für Januar den Wert 0,0416; die Amplitude der täglichen Schwankungen beträgt 0,0521; ohne Ausnahme sind alle mittleren stündlichen Werte positiv. Sehr wichtig ist es zu bemerken, daß die Intensität des Feldes im Winter ziemlich denselben täglichen Gang aufweist; für Slutsk (Pavlovs) bei Leningrad ist das Hauptminimum ebenso um 4 morgens und das Hauptmaximum um 8 Uhr abends vorhanden; das nachmittägige Minimum und das Morgenmaximum sind ebenfalls, aber in einer sehr schwach aus-

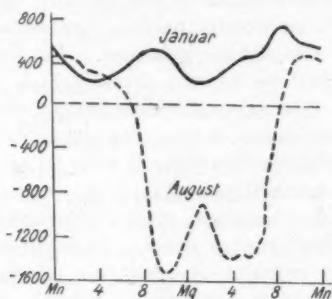


Fig. 2.

geprägten Form, bemerklich.¹⁾ Der tägliche Gang der Intensität des Feldes kann offenbar durch die Distribution in den unteren Schichten der Atmosphäre, der freien elektrischen Ladungen erklärt werden: gegen 8 Uhr abends verteilen sich oberhalb der Erdoberfläche intensive positive Ladungen, die die Intensität des Feldes verstärken und dieselbe zum Maximum bringen. Um 4 morgens erreicht die Dichte der freien positiven Ladungen ihr Minimum und gleichzeitig zeigt sich ein Minimum der Intensität des Feldes. Obgleich um 1 Uhr nachmittags ein noch tieferes Minimum der Dichtigkeit der elektrischen Ladungen wohl auch zur Erscheinung kommt, ist dennoch dasselbe nicht mit einer Schwächung der Intensität des Feldes begleitet; die Ursache einer derartigen Uneinigkeit kann vielleicht durch die respektiv geringe Mächtigkeit der

1) W. Obolensky, Geophys. Sbornik IV. Lief. 2. 1923 (auf russisch).

mit geschwächten elektrischen Ladungen versehene Schicht bedungen sein.

Dem oben erwähnten täglichen Gang kann folgende Erklärung gegeben werden: das gegen 1 Uhr nachmittags vorhandene Hauptminimum fällt mit der Zeit der stärksten Einwirkung der Erdoberfläche auf die an ihr anliegenden Luftschichten zusammen; zu dieser Zeit ist sogar während der Wintermonate das Entstehen von sei es nur schwachen aufsteigenden Strömen sowie das Ausbilden von horizontalen Strömungen möglich; unter der Wirkung solcher Ausströmungen vermögen bedeutende Massen von negativ geladenen, von der Schneedecke oder überhaupt vom Erdboden abgetrennten Teilchen in die Atmosphäre gelangen. Zu dieser Tageszeit besitzen in der Tat die unteren Erdschichten eine minimale Transparenz und eine schwache elektrische Leitfähigkeit, was das Vorhandensein einer Menge von langsamen Ionen und überhaupt Dunstkernen beweist. Weiter unten werden Fälle angeführt, wann bei heftigem Winde im Winter starke negative Ladungen, die während eines Schneegestöbers bis zu 5 ESE in einem Kubikmeter stiegen, beobachtet worden sind; in solchen Fällen entsteht ebenfalls ein Wechseln der Vorzeichen in der Intensität des Feldes. Folglich kann im Laufe der Nachmittagsstunden an mehr oder weniger normalen Tagen eine bedeutende Sättigung der Atmosphäre mit negativen Ladungen, sowohl wie auch eine gewisse Herabminderung der freien positiven Ladung in den unteren Atmosphärenschichten stattfinden. Zeigt dennoch die Intensität des Feldes dabei kein tiefes Minimum, so kann bereits dieser Umstand durch eine geringe vertikale Mächtigkeit der Schicht, die der erwähnten Wirkung unterworfen war, erklärt werden.

In den Tagesstunden während des Sommers muß der Einfluß der aufsteigenden Ströme viel schärfer hervortreten und auf eine mächtigere atmosphärische Schicht verbreitet werden; wie wir es weiter sehen werden, zeigen sich in der Tat in den Morgenstunden im Sommer bedeutende negative Freiladungen, die ein sehr scharfes Minimum der Intensität des Feldes hervorrufen. Zu der Zeit des Sonnenuntergangs werden die erwähnten Luftströmungen nach und nach schwächer; absteigende Strömungen beginnen sich zu zeigen und die negativen Teilchen setzen sich allmählich nieder; unter

der Wirkung des zu der Erdoberfläche gerichteten elektrischen Feldes fangen gleichzeitig die positiven Ladungen sich mehr und mehr in den unteren atmosphärischen Schichten zu versammeln an und gegen 8 Uhr abends erweist sich ein Maximum der positiven Ladung, der mit einem scharf ausgeprägten Maximum der Intensität des Feldes begleitet ist. Im weiteren Verlaufe fängt die positive Dichtigkeit der Ladungen zu sinken an. Dieses Sinken scheint durch nachstehende Umstände bewirkt zu sein: zu dieser Tageszeit tritt im Winter gewöhnlich eine Formierung des Reifes hervor, dessen Teilchen gleichzeitig mit sowohl den positiven, als mit den negativen massiven Ionen sich auf den Erdboden niederzulassen pflegen, wobei aber die positiven Ionen, deren Anzahl in den unteren atmosphärischen Schichten überwiegend ist, sich in einer größeren Quantität niedersetzen müssen. Die Dichtigkeit der elektrischen Ladung sinkt dabei allmählich und gegen 4 Uhr morgens erreicht dieselbe ihr Minimum; zu derselben Zeit erweist sich auch die minimalste Intensität des Feldes. Wie bekannt, werden zu dieser Zeit sowohl die Transparenz als die Leitfähigkeit der Atmosphäre am größten, da die letztere hinlänglich von den Dunstkernen befreit wird und der Reifsformierungsprozeß fast aufhört. Infolge der Steigerung der elektrischen Leitfähigkeit und unter der Einwirkung des Erdfeldes, fängt auch zu dieser Zeit der Bewegungsprozeß der positiven Ionen nach abwärts und der negativen Ionen nach aufwärts stark sich zu entwickeln an; nach und nach entsteht in den unteren Luftschichten ein Aufsammeln der positiven Ladungen, weswegen um 9 Uhr früh ein Morgenmaximum der Dichtigkeit der elektrischen Ladungen, der mit dem Maximum der Intensität des elektrischen Feldes zusammentrifft, eintritt. Ziemlich ähnlichen Charakter hat der Gang auch für die übrigen Wintermonate; die Tabelle gibt den täglichen Gang der Ladungsdichtigkeit im Durchschnitt für drei Monate: Dezember, Januar und Februar.

Interessant ist es zu notieren, daß das Nachtminimum für November sich um 5 Uhr früh zeigt, für Dezember — um 2 Uhr nachts, für Januar — um 4 Uhr früh, für Februar um 5 Uhr früh und für März um 6 Uhr früh oder daß die Zeit der Nachtminimis fast dieselben Änderungen aufweist, wie die Zeit des Sonnenuntergangs und des Einbrechens der Nacht.

Im Durchschnitt für die erwähnten drei Wintermonate erwies sich die mittlere Dichtigkeit der Ladungen gleich $0,0507 \text{ ESE/m}^2$; das absolute Maximum bezieht sich auf 10 Uhr abends und beträgt $0,0875$, das absolute Minimum auf 1 Uhr nachmittags und beträgt $0,0248$; die Amplitude der täglichen Schwankung war gleich $0,0627$ und überstieg also den täglichen Mittelwert.

Was die Sommermonate betrifft, so ist der tägliche Gang für dieselben etwas ein anderer. So z. B. für August erhalten wir einen nahezu einfachen täglichen Gang (Fig. 2) mit einem Maximum gegen 11 Uhr abends $0,0489$ und einem Minimum für die Tagesstunden. Das Tagesminimum für August (sowohl wie auch für Juli) hat eine kompliziertere Form, indem sich dasselbe aufweist, als wäre es in zwei Minimi (gegen 10 Uhr morgens ($-0,1541$) und um 4 Uhr nachmittags ($-0,1411$), die durch ein sekundäres Maximum ($-0,0908$) getrennt wären, geteilt.

Die Entstehung eines derartigen täglichen Ganges kann auf folgende Weise erklärt werden: wie es bereits erwähnt wurde, stellt in den Tagesstunden besonders während der Sommerzeit die Erdoberfläche eine Urquelle vor, die permanent unsere Atmosphäre mit negativen Ladungen versieht. Haben in den Morgenstunden die vertikalen auf- und absteigenden Strömungen noch nicht eine bedeutende Stärke erreicht, so wird die Atmosphäre durch die von der Erdoberfläche steigenden Partikeln immer mehr und mehr mit negativen Ladungen geladen. Kaum fangen aber die Mittagsstunden heranzurücken an, so entwickeln sich immer mächtiger die vertikalen Strömungen, wobei die negativen Ladungen emporgerissen werden, während den positiven Ladungen eine Fallbewegung zukommt. Im Resultate wird dabei die mittlere Dichtigkeit der negativen Ladung vermindert und gegen 1 Uhr nachmittags erhält dieselbe ihren Minderwert. Hinterher werden die vertikalen Strömungen immer schwächer und die Versorgung der unteren Luftschichten mit positiven Ladungen läßt allmählich nach; unterdessen fängt wiederum die Anzahl der noch immer von dem Erdboden hinüberwandernden negativen Ladungen zu wachsen an und gegen 4—5 Uhr nachmittags erreicht die negative Raumladung ihr Maximum.

Ferner werden die vertikalen aufsteigenden Ströme um so viel schwächer, daß die negativen Ladungen auf den Erdboden

zu fallen beginnen, wobei die negative Raumladung nach und nach sinkt, bis endlich gegen 9 Uhr dieselbe ihr Vorzeichen umkehrt. Das Abendmaximum um 11 Uhr nachts kann auf dieselbe Weise erklärt werden, wie das Maximum für die Wintermonate; das Morgenminimum gegen 4 Uhr früh hat nicht Zeit genug, der kurzen Nacht wegen, sich erkennbar zu entwickeln; dieselbe Bemerkung bezieht sich ebenfalls auch zum Morgenmaximum. Der mittlere tägliche Wert für August beträgt $-0,0471$ ESE, das Hauptmaximum ist gleich $-0,0489$ und das Hauptminimum $-0,1541$; die Amplitude des täglichen Ganges ist gleich $0,2030$.

Für Juli und September wurde ein ungefähr ähnlicher Charakter des täglichen Ganges erhalten, während im Juni, welcher bei uns im Jahre 1924 verhältnismäßig kalt war, ein fast einfacher täglicher Gang mit einem Maximum $0,0411$ um 11 Uhr abends und einem Minimum $-0,0099$ um Mittagszeit erhalten wurde. Eben ein ähnlicher täglicher Gang ist auch für den Monat Mai vorhanden: Maximum $0,0840$ um Mitternacht und Minimum um 1 Uhr nachmittags. Die Beobachtungen der Intensität des Feldes, die auf dem Pavlovskischen Observatorium für die Periode 1916—1920 ausgeführt wurden, zeigten, daß für den Sommer ein fast einfacher täglicher Gang der Intensität des Feldes mit einem Minimum gegen 1 Uhr nachmittags und einem Maximum gegen Mitternacht erhalten wird. Der erwähnte tägliche Gang der Intensität des Feldes kann hinreichend durch die täglichen Variationen der elektrischen Raumladungen in den unteren atmosphärischen Schichten erklärt werden.

Es ist interessant zu bemerken, daß in den Tagesstunden im Sommer durchschnittlich für ein Intervall von 10 Minuten negative Ladungen erhalten werden, wobei dieselben in kurzer Zwischenzeit erhebliche Variationen nach der Stärke erfahren und sogar ihr Vorzeichen ändern; die positiven Ladungen sind dabei beträchtlich schwächer als die negativen; besonders häufig geschieht dieses Wechseln der Vorzeichen der Ladungen gegen 1—2 Uhr nachmittags, d. h. zur Zeit der stärksten Entwicklung der aufsteigenden und der absteigenden Ströme; infolgedessen tritt im Juli, August und September, wie schon angegeben, gegen 1—2 Uhr nachmittags ein sekundäres Maximum ein (Fig. 2). Zu dieser Tageszeit erscheint die atmo-

sphärische Luft als wäre sie in kleine Ströme oder Wirbel zerteilt, die sich stark in betreff der elektrischen Ladungen unterscheiden. Bei Ablesungen des Elektrometers, die jede 10 Sekunden ausgeführt wurden, wurden dabei Raumladungen erhalten, die innerhalb der Grenzen von -20 bis $+2$ ESE im Kubikmeter schwankten. Dergleiche Schwankungen wurden in Nachtstunden im Sommer und im Laufe des ganzen Tages in der Winterzeit nicht beobachtet.

Die Tab. 2 enthält die Grenzen, innerhalb denen die Werte der elektrischen Raumladung in einzelnen Monaten schwankten; es sind auch sowohl die mittleren maximalen und minimalen Werte, als die absoluten maximalen und minimalen Werte, die aus Beobachtungen für eine Periode von 10 Minuten und von 1 Minute erhalten wurden, angegeben. Aus dieser Tabelle ist es zu ersehen, daß die einzelnen Werte der elektrischen atmosphärischen Raumladungen innerhalb breiten Grenzen schwanken können, besonders in der Sommerzeit; so z. B. für September sind die Werte der Ladungen, die sich aus den Beobachtungen für die Periode von einer Minute ergeben, innerhalb der Grenzen von 2,136 bis $-8,415$ begriffen, dagegen für Dezember (die stärksten Winterschwankungen) dieselben nur innerhalb der Grenzen von 0,567 bis $-0,007$ liegen.

Tabelle 2.

Maximale und minimale Werte der Dichtigkeit.

Monate	Mittlere Werte		Absolute Werte für 10 Min.		Absolute Werte für 1 Min.	
	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum
Januar	0,1092	0,0091	0,2493	$-0,0345$	0,294	$-0,046$
Februar	0,1276	0,0190	0,2350	0,0002	0,303	$-0,022$
März	0,0979	$-0,0281$	0,2705	$-0,0883$	0,405	$-0,294$
April	0,1019	0,0066	0,2607	$-0,0361$	0,936	$-0,116$
Mai	0,0531	$-0,0228$	0,0929	$-0,2945$	0,998	$-0,855$
Juni	0,0538	$-0,0229$	0,1620	$-0,0970$	0,191	$-0,197$
Juli	0,0550	$-0,0833$	0,0969	$-0,1869$	0,169	$-0,322$
August	0,0798	0,3487	0,2016	$-1,6271$	0,442	$-5,981$
Septemb.	0,1262	$-1,1804$	0,2642	$-5,2774$	2,136	$-8,415$
Oktober	0,0819	$-0,0313$	0,1940	$-0,1936$	0,350	$-0,574$
November	0,0926	0,0014	0,2176	$-0,0516$	0,307	$-0,364$
Dezember	0,3756	$-0,0138$	0,4419	$-0,0273$	0,567	$-0,008$

Im Jahresmittel ist ein fast einfacher täglicher Gang mit einem Maximum um 11 Uhr abends und einem Minimum um

8 Uhr nachmittags erhalten worden, außerdem ist ein kaum erkennbares sekundäres Minimum um 3 Uhr nachts und ein sekundäres Maximum um 5 Uhr früh vorhanden.

Nun gehen wir zum jährlichen Gang der elektrischen Raumladung über. Wie es aus der letzten vertikalen Spalte der Tab. 1 zu ersehen ist, stellt sich der jährliche Gang auf folgende Weise vor: das Maximum fällt auf Dezember und $= 0,0756$ ESE im Kubikmeter, das Minimum auf September und $= -0,2305$; nur die Monate Juli, August und September geben negative Werte; die übrigen 9 Monate geben positive Werte. Im großen Ganzen ist der jährliche Gang ein ziemlich gleichmäßiger mit Ausnahme von April, der ein sekundäres Maximum (0,0570) ergibt; dabei muß aber in Betracht genommen werden, daß im Jahre 1924 April schneebedeckt war und sich durch eine niedrige Temperatur auszeichnete; dazu muß noch zugerechnet werden, daß wir imstande waren für April nur 6 normale Tage auszuwählen, die durchaus nicht als klare Tage zu betrachten sind; es ist möglich, daß bei einer größeren Anzahl von Beobachtungen die erwähnte Abweichung vom normalen jährlichen Gange nicht zum Vorschein kommen würde. Der erhaltene jährliche Gang der Dichtigkeit der elektrischen atmosphärischen Ladungen gibt uns die Möglichkeit, dem jährlichen Gang der Intensität des Feldes, der ebenfalls ein Maximum für die Winterzeit und ein Minimum für die Sommermonate zeigt, eine ausreichende Erklärung zu geben. Wenn man mit Beobachtungen für solche kurze Perioden, wie z. B. 1—2 Jahre, zu tun hat, so kann bemerkt werden, daß zuweilen der jährliche Gang der Intensität des Feldes ebenfalls sekundäre Maximi für die Winterzeit aufzuweisen pflegt.

Außer an klaren, normalen Tagen wurden die Beobachtungen auch an Tagen mit Regenfall, Schneefall, Schneegestöbern, Nebelbildungen usw. ausgeführt; derartige Beobachtungen wurden möglichst oft, aber hauptsächlich nur während den Tagesstunden ausgeführt.

Zuerst gehen wir zur Untersuchung der Beobachtungen während des Regens über. Es sei bemerkt, daß zum Schutz des Apparats gegen direkte Eindringung der Regentropfen ein Metallschutzdach oberhalb der Fensteröffnung unter einer Neigung von 45° befestigt war, wobei der untere Rand

genau in die Höhe des unteren Randes der Fensteröffnung fiel; das Metalldach war mit Seitenwänden versehen, die den Apparat von den Seiten schützen. Es wurden im ganzen 241 Beobachtungen bei Regenwetter ausgeführt; die Intensität des Regens wurde nach Augenmaß geschätzt, wobei wir 4 Gruppen desselben unterschieden haben: starker Regen, minderstarker Regen, mittelstarker Regen und schwacher Regen. Die Ergebnisse dieser Beobachtungen sind in der Tab. 3 angegeben.

Tabelle 3.
Beobachtungen während des Regens.

Intensität des Regens	Anzahl d. Beobachtungen	Mittlere Raumladung	Mittlere maximale Raumladung	Mittlere minimale Raumladung	Abs. Maximum der Raumladung	Abs. Minimum der Raumladung
Starker Regen . .	14	- 2,2028	+ 1,392	- 7,342	+ 11,532	- 29,760
Minderstarker Regen	14	- 0,9749	- 0,142	- 2,369	+ 1,740	- 5,832
Mittelstarker Regen	73	- 0,5809	- 0,076	- 1,440	+ 3,600	- 0,988
Schwacher Regen .	140	- 0,0753	+ 0,058	- 0,024	+ 2,292	- 2,430

Wie es aus dieser Tabelle zu ersehen ist, ist die mittlere Dichtigkeit der elektrischen Ladungen negativ, wobei der absolute Wert der Raumladung mit dem Zuwachs der Intensität der Niederschläge steigt. Nur in 36 Fällen aus der gesamten Zahl von 241 Beobachtungen oder in 15 Proz. aller Fälle, war die mittlere elektrische Raumladung positiv; gegen 80 Proz. dieser letzten Fälle kommt auf die Zeit der schwachen Regenfälle zu, wann ohnehin an niederschlagsfreien Tagen sogar bei trübem Wetter in der kälteren Jahreszeit beträchtliche positive Ladungen vorhanden sind.

Während des Niederfallens von minderstarkem Regen wurden positive Ladungen sehr selten beobachtet und in keinem einzigen Falle erhielt die mittlere Dichtigkeit einen negativen Wert. Bei mittelstarkem (73 Fälle) und bei starkem Regen (14 Fälle) waren respektiv nur 7 und 2 Fälle vorhanden, die im Durchschnitt positive elektrische Raumladungen aufwiesen.

Nach unseren Beobachtungen ist also die Dichtigkeit der Ladungen während des Regens im großen ganzen negativ, wobei dieselbe mit dem Zuwachs der Intensität des Feldes

steigt. Die bisweilen vorkommenden positiven Ladungen sind nur während starker Regen, vorzugsweise von einem gewitterhaften Charakter, sowie bei schwachen Regen, vorhanden; im ersten Falle ändert sich öfters das Vorzeichen der Ladung vom positiven auf ein negatives und umgekehrt; im zweiten Falle sind nur schwache positive Ladungen vorhanden; die Einwirkung der Niederschläge äußert sich in diesem Falle nur im Sinne der Verminderung der gewöhnlichen positiven Dichtigkeit, wobei der Regen, infolge seiner Schwäche, nicht das Vorzeichen der Luftladung zu ändern vermag, besonders im Winter, wann die positiven elektrischen Raumladungen ohnehin eine bedeutende Größe aufweisen. Es sei bemerkt, daß während des Regens die zu untersuchende, von dem Apparate aspirierte Luft nur die allerfeinsten Wassertröpfchen enthalten konnten; die gewöhnlichen Regentropfen konnten in den Apparat nur in Ausnahmefällen geraten. Im allgemeinen haben bei starken und schwachen Niederschlägen die negativen Ladungen eine bedeutende Größe, die zuweilen bis 30 ESE im Kubikmeter stieg; die positiven Ladungen erreichten in einzelnen Fällen den Wert von etwa 12 ESE.

Gehen wir nun auf die Beobachtungen während der Schneefälle über. Schließt man Fälle der Schneegestöber und Schneefälle bei starkem Winde aus, so werden folgende Resultate, die 221 Beobachtungen umfassen, erhalten (Tab. 4).

Tabelle 4.
Beobachtungen bei Schneefall.

Intensität	Anzahl d. Beobachtungen	Mittlere Dichtigkeit	Mittleres Maximum	Mittleres Minimum	Absolutes Maximum	Absolutes Minimum
Starker Schneefall	10	+ 0,0995	+ 0,481	- 0,278	+ 2,024	- 1,434
Mittelstarker „	42	+ 0,0843	+ 0,135	+ 0,043	+ 0,576	- 0,088
Schwacher „	169	+ 0,0472	+ 0,079	+ 0,025	+ 0,517	- 0,052

Wie es diese Tabelle zeigt, werden während der Schneefälle im großen ganzen positive Luftladungen erhalten; der absoluten Größe nach sind dieselben im allgemeinen bedeutend geringer, als während des Regens. Die absolute Dichtigkeit der Ladungen steigt mit dem Zuwachs der Intensität der Schneefälle. Unter 10 in 3 Fällen von stark fallendem Schnee,

die auf Anfang November zukommen, wurden im Durchschnitt negative Raumladungen beobachtet, wobei in 2 Fällen ausschließlich negative Ladungen überwogen; die übrigen 7 Fälle wiesen im Durchschnitt eine positive Dichtigkeit auf, wobei in 5 Fällen ausschließlich negative Ladungen vorhanden waren. Nicht selten können also bei starkem Schneefall negative Ladungen vorhanden sein, die zum größten Teil mit positiven Ladungen binnen einem und demselben Schneefalle untereinander abzuwechseln pflegen.

Bei mittelstarkem Schneefall wurde unter 42 in 2 Fällen im Durchschnitt eine negative Raumladung beobachtet, wobei in einem von diesen Fällen einzelne Ablesungen positive Ladungen aufwiesen. Unter den übrigen 40 in 37 Fällen wurden ausschließlich positive Ladungen erhalten und nur in 3 Fällen wurden einzelne negative Ladungen abgelesen. Was die schwachen Schneefälle betrifft, so wurden unter 169 nur in 6 Fällen im Durchschnitt negative Ladungen erhalten, wobei in 3 Fällen außer negativen Ladungen auch positive Ladungen beobachtet wurden, die aber miteinander abwechselten; unter den übrigen 163 in 146 Fällen waren ausschließlich positive Ladungen beobachtet und nur in 17 Fällen waren einzelne negative Ladungen konstatiert, wobei dennoch positive Ladungen in überwiegender Quantität vorhanden waren. Für sämtliche untersuchten Schneefälle, die nicht in Verbindung mit starkem Winde verliefen oder mit Schneegestöbern begleitet waren, schwankten die einzelnen Werte der Luftladungen innerhalb der Grenzen von 2,024 bis $-1,494$ ESE im Kubikmeter.

Bei windschwachem Schneefall hat sich also folgendes Sachverhältnis erwiesen: die Luft war meistens positiv geladen, negative Ladungen fanden vorzugsweise während starkem Schneefalle statt. Die Intensität der Ladungen war während des Schneefalls bedeutend geringer als während des Regens.

Es waren einige Fälle unter unseren Beobachtungen vorhanden, wenn Regen und Schnee abwechselnd aufeinander folgten; in diesen Fällen wurde eine scharfe Veränderung des Wertes der elektrischen Raumladung beobachtet. Dieser Fall ist durch folgendes Beispiel veranschaulicht: am 30. April 1924 ergaben die Beobachtungen von 2^h 49^m bis 59^m p., bei mittel-

starkem Schneefall in Verbindung mit Regen eine mittlere Dichtigkeit von $-0,0028$ ESE im Kubikmeter, mit einem Maximum von $-0,074$ und einem Minimum von $-0,0038$; dann aber, wenn der Schneefall aufhörte und der Regen anfang, ergeben die Beobachtungen von $8^h 0^m$ bis 10^h p. einen Wert der mittleren Dichtigkeit $-0,6250$ mit Maximum $-0,420$ und Minimum $-0,630$.

Nach Aufhören des Regens oder Schneefalls nehmen die elektrischen atmosphärischen Ladungen nach und nach in einem verhältnismäßig kurzen Zeitraum (etwa binnen 10 bis 15 Minuten) wieder ihre normalen Werte an. Ein Beispiel vom 18. Mai 1924 veranschaulicht dieses Sachverhältnis:

Tabelle 4.

Zeit	Mittlere Ladung	Maximum	Minimum	Wetterzustand
$2^h 15-27^m$ p.	$-0,0642$	$-0,034$	$-0,122$	5 CuNi: vor dem Regen
$2^h 27-38^m$ p.	$-0,6250$	$-0,490$	$-0,890$	Feiner, zieml. dichter Regen
$2^h 38-48^m$ p.	$-0,4680$	$-0,400$	$-0,530$	Regen hörte auf; Sonne fängt an zu scheinen
$2^h 48-55^m$ p.	$-0,0364$	$0,000$	$-0,066$	2 Cu, 10 Minuten nach dem Regen

Beim Herannahen des Gewitters sind öfters erhöhte (und dabei meistens negative) Werte der elektrischen Raumladung beobachtet worden. So z. B. in der Nacht vom 15. Juni 1924 von $11^h 29^m$ bis $11^h 50^m$ nachts (Bewölkung 10 CuNi, vor dem Gewitter heftige Donnerschläge, kein Regen) war die mittlere Dichtigkeit $-0,2380$, Maximum $-0,154$ und Minimum $-0,334$ ESE im Kubikmeter.

Unsere Beobachtungen zeigten, daß beim Aspirieren der Luft während des Regens vorzugsweise negative Ladungen erhalten werden. Dagegen haben die Beobachtungen auf dem Potsdamer und auch auf anderen Observatorien gezeigt, daß die elektrischen Ladungen der Regentropfen sich meistens als positiv aufweisen. Diese Resultate stimmen mit der Theorie der Gewitterelektrizität gut überein, die vor kurzer Zeit durch die Arbeiten von Lenard¹⁾ eine eingehende Entwicklung bekommen hat und gemäß welcher beim Niederfallen der Wassertropfchen von der Fläche größerer Tropfen in den aufsteigen-

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 65 S. 629. 1921.

den Strömen sich stets unter gewissen Bedingungen allerfeinste Tröpfchen lösen, wobei die letzteren negativ und die groben Tropfen positiv geladen sind; ist die Geschwindigkeit der aufsteigenden Ströme gering, so findet unter der Wirkung der elektrostatischen Induktion (in Übereinstimmung mit der Theorie von Elster und Geitel) eine ähnliche Verteilung der Ladung statt. Bei unseren Versuchen konnten in den Apparat beim Aspirieren der Außenluft gerade nur feinste Wassertropfchen eindringen, während bei Elektrizitätsmessungen der Niederschläge hauptsächlich nur Ladungen der groben Tropfen beobachtet werden; der Vergleich unserer Beobachtungen mit den Beobachtungen der Elektrizität der Niederschläge bestätigt also vollkommen die Richtigkeit der Lenardschen Theorie. Zu gleicher Zeit zeigen die Beobachtungen über den elektrischen Zustand des Schnees, daß die Schneeflockchen meist negative Ladungen geben, während unsere Beobachtungen beim Aspirieren der Luft und der allerfeinsten Schneeflockchen hauptsächlich positive Ladungen aufwiesen. Folglich wird für Schnee ein umgekehrtes Verhältnis erhalten: die größeren Schneeflocken weisen negative und die feinsten Schneeflockchen positive Ladungen auf. Sehr wichtig wäre es, diese Resultate durch genaue Laboratorienversuche zu begründen. Es wurde bereits oben bemerkt, daß wir Schneefälle, die mit heftigem Winde oder mit Schneegestöbern begleitet waren, eliminiert haben. Für derartige Schneefälle ergaben die Beobachtungen folgende Dichtigkeiten der elektrischen Ladungen (Tabelle 5):

Tabelle 5.
Schnee in Verbindung mit Wind.

	Anzahl d. Beobachtungen	Mittlere Raumladung	Mittleres Maximum	Mittleres Minimum	Absolutes Maximum	Absolutes Minimum
Schnee mit Wind	16	+ 0,0717	+ 0,172	- 0,001	+ 0,924	- 0,213
Schneegestöber	41	- 0,0058	+ 0,557	- 0,447	+ 5,584	- 5,412

Unter 16 in 4 Fällen des windstarken Schneefalls war die mittlere Raumladung negativ, wobei in einem von diesen 4 Fällen einzelne positive Ablesungen vorhanden waren; unter

den übrigen 12 Fällen fand in 3 Fällen eine Abwechslung der positiven und negativen Ladungen statt, wobei im Durchschnitt das positive Vorzeichen vorherrscht; folglich, unter 16 in 7 Fällen waren negative Ladungen vorhanden. Was die Beobachtungen während der Schneegestöber betrifft, so wurden unter 41 Fällen im Durchschnitt in 15 Fällen negative Ladungen aufgewiesen, wobei unter diesen 15 Schneegestöbern in 6 Fällen ein Abwechseln der positiven und negativen Ladungen stattfand und in 9 Fällen ausschließlich negative Ladungen vorhanden waren. Die übrigen 26 Schneegestöber besaßen im Durchschnitt positive Ladungen, wobei ausschließlich positive Ladungen nur in 13 Fällen beobachtet wurden; die übrigen 13 Schneegestöber wiesen ein Abwechseln der positiven und negativen Ladungen auf. Folglich unter allen 41 Schneegestöberbeobachtungen nur in 13 Fällen wurden ausschließlich positive Ladungen abgelesen, und in den übrigen 28 Fällen waren auch negative Ladungen vorhanden. Während der Schneegestöber schwankten die Werte der Ladungen innerhalb der Grenzen von $+5,584$ bis $-5,412$.

Das nicht selten beobachtete Vorhandensein von negativen Ladungen beim Schneefall in Verbindung mit heftigem Winde und noch öftere Fälle solcher Ladungen bei Schneegestöbern sind offenbar durch das Aufsteigen vom Boden negativ geladener Schneepartikeln verursacht. Es sei noch bemerkt, daß währenddem der Schnee zuweilen aus dem Wege, der in der Nähe des Apparats ging, abgeworfen wurde, eben falls erhebliche negative Ladungen notiert waren, die bei einzelnen Ablesungen bis 3—5 ESE im Kubikmeter erreichten. Eine separate Gruppe bilden Beobachtungen, die während der Graupeln oder Graupeln in Verbindung mit Schnee erhalten wurden; im ganzen 21 Fälle. Dieselben wiesen im Durchschnitt eine elektrische Raumladung von $+0,0441$ mit einem mittleren Maximum von $+0,066$ und einem mittleren Minimum $+0,028$. Unter diesen Beobachtungen wurden in 3 Fällen ausschließlich negative Ladungen, in 3 Fällen — miteinander abwechselnde — positive und negative Ladungen, aber mit einem Überschuß der negativen Ladungen und in 15 Fällen mit ausschließlich positiven Ladungen abgelesen. Folglich bei Graupeln, sowie bei Schneefall sind vorzugsweise positive Ladungen vorhanden. In einzelnen Intervallen von einer

Minute schwankten während der Graupeln die Raumladungen innerhalb der Grenzen von $+0,542$ bis $-0,087$ ESE um Kubikmeter.

Unter unseren Beobachtungen sind 31 Beobachtungen vorhanden, die sich zur Zeit beziehen, wenn ein nasser Schnee oder Schnee in Verbindung mit Regen gefallen war. Diese Beobachtungen weisen im Durchschnitt eine elektrische Luft-raumladung von $-0,0478$ mit einem mittleren Maximum von $+0,006$ und einem mittleren Minimum von $-0,101$ auf. Unter diesen 31 Beobachtungen in 10 Fällen waren ausschließlich positive Ladungen, in 12 Fällen ausschließlich negative Ladungen vorhanden und 9 Beobachtungen wiesen miteinander abwechselnde positive und negative Ladungen auf; unter den letzten 9 Fällen in 7 Fällen war dabei ein Überschuß der negativen Ladungen und in 2 Fällen ein Überschuß der positiven Ladungen vorhanden. Das absolute Maximum der elektrischen Raumladungen für einzelne Intervalle von je eine Minute war gleich $-0,148$, das absolute Minimum $-0,710$. In den untersuchten Fällen waren also sowohl die positiven als die negativen Ladungen fast in gleicher Anzahl, mit einem schwachen Überschuß der negativen Ladungen, vorhanden. So war es auch vorauszusehen, da diese Erscheinung nur einen Zwischenfall zwischen Regen und Schnee darstellt.

Es sind auch noch 4 Beobachtungen, die während des Regens in Verbindung mit Hagel und eine Beobachtung, die während des Hagels allein ausgeführt waren, vorhanden. Im Durchschnitt war dabei die Raumladung gleich $-0,5894$ mit einem mittleren Maximum von $+0,810$ und einem mittleren Minimum von $-1,604$. Die absoluten Werte für einzelne Fälle schwankten innerhalb der Grenzen von $+3,806$ bis $-4,404$. Im allgemeinen werden während des Hagels erhebliche Werte der elektrischen Raumladung erhalten, wobei die Werte der Ladungen sowie ihre Verteilung zwischen den positiven und negativen Werten annähernd dieselben sind, wie während starker Regenfälle.

Siebenmal wurden Beobachtungen während des Eisregens ausgeführt. Im Durchschnitt beträgt dabei die elektrische Raumladung den Wert von $-0,0857$ mit einem mittleren Maximum $-0,001$ und einem mittleren Minimum $-0,080$. Unter 7 in 3 Fällen sind ausschließlich negative Ladungen,

in 2 Fällen ausschließlich positive Ladungen und in 2 Fällen miteinander abwechselnde positive und negative Ladungen mit vorherrschenden negativen Ladungen, vorhanden. Im allgemeinen wird dabei ein gleicher Charakter der Verteilung der Ladungen, wie bei nassem Schnee, erhalten. Bei einzelnen Ablesungen erhielt das absolute Maximum den Wert von $-0,081$ und das absolute Minimum den Wert $-0,204$; im allgemeinen waren die Ladungen, besonders die positiven, ziemlich schwach, was eine Erklärung in der überhaupt schwachen Niederschlagsintensität bei Eisregen zu haben scheint. Zuletzt gehen wir zur Untersuchung der elektrischen Luftladungen während des Nebels über (Tab. 6); hieselbst sind nur Fälle des nassen Nebels ohne Regen in Betracht genommen. Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, werden während des Nebels im allgemeinen größere Werte der elektrischen Ladungen beobachtet, als beim normalen Wetter. Was das Vorzeichen der Ladungen betrifft, so werden während des Nebels bald positive, bald negative Ladungen erhalten; sehr oft kommt es vor, daß während eines und desselben Nebels die Vorzeichen der Ladungen miteinander abwechseln.

Tabelle 6.
Beobachtungen während des Nebels.

Intensität des Nebels	Anzahl d. Beobachtungen	Mittlere Raumumladungen	Mittleres Maximum der Raumladungen	Mittleres Minimum der Raumladungen	Absolutes Maximum	Absolutes Minimum
Starker Nebel	15	$-0,1109$	$+0,272$	$-0,163$	$+1,458$	$-1,062$
Mittelmäßig. Nebel	51	$-0,2340$	$+0,025$	$-0,660$	$+0,828$	$-5,980$
Schwacher Nebel	94	$-0,0505$	$+0,093$	$-0,082$	$+0,294$	$-3,287$

Im allgemeinen war es nicht möglich einen Zusammenhang zwischen Ladungsmenge und Nebelintensität festzustellen. Der Versuch, die Nebelbeobachtungen in Kategorien zu verteilen, die der wärmeren und der kälteren Jahreszeit entsprechen würden, blieb ebenfalls resultatlos. Es kann nur konstatiert werden, daß bei Nebelwetter sich meistens erhebliche elektrische Ladungen mit abwechselnden Vorzeichen aufweisen; die Werte derselben schwankten innerhalb der Grenzen von $-1,4526$ bis $5,9800$.

Unsere Beobachtungen geben Werte der elektrischen Raumladungen, die sich zu den an der Erdoberfläche anliegenden Luftschichten beziehen. Sehr wichtig wäre es, ähnliche Beobachtungen auf einer gewissen, sei es auch nicht sehr großen Höhe, über dem Boden aufzustellen. Auch wäre es höchst interessant, derartige Beobachtungen in anderen Örtlichkeiten mit verschiedenen klimatischen Verhältnissen zu wiederholen.

Leningrad, Meteorol. Observatorium des Forstinstituts.
Januar 1925.

(Eingegangen 30. Juni 1925.)

3. V
zu

ein
ladu
wider
der
nach
statist
Aufg
einer
oder
geru
halts
keits
in d
um
wo
ache
Ans
Fun
gela

betr

nur

Bei
span

3. *Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtungen zur Verzögerungszeit bei Funkenentladungen;* *von Johann Dejmek.*

Durch eine Arbeit K. Zubers¹⁾ in diesen Annalen wurde ein umstrittener Punkt über die Verzögerungszeit bei Funkenentladungen nachgeprüft. Nach der einen der beiden einander widersprechenden Ansichten [Pedersen²⁾, Regener³⁾] kommt der Verzögerungszeit eine wohldefinierte konstante Größe zu, nach der andern [Campbell⁴⁾, Zuber¹⁾] entspricht ihr eine *statistische* Größe. In Zubers Arbeit ist zugunsten der letzteren Auffassung entschieden worden. Da man weder über das an einem Orte im Raume der Funkenstrecke erzeugte Elektron oder Ion, noch über dessen durch Stoßionisierung hervorgerufene — zur Funkenentladung nötige — Vermehrung Anhaltspunkte hat, wurde begreiflicherweise zu wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtungen gegriffen. Jedenfalls hat man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung das einzige Auskunftsmittel, um hier — wie in anderen Gebieten der Mechanik und Physik —, wo wir, vermöge unserer Unkenntnis der den Verlauf der Erscheinung beeinflussenden Faktoren, außerstande sind, uns einen Ansatz zu einer Differentialgleichung, die den Verlauf der Funkenentladung beschreibt, vorzustellen, zu Resultaten zu gelangen, die die Erfahrung bestätigt.

M. v. Laue⁵⁾ hat auf Grund von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen eine Theorie der Verzögerungszeiten hergeleitet,

1) K. Zuber, Ann. d. Phys. 76. S. 231. 1925.

2) P. O. Pedersen, Ann. d. Phys. 71. S. 317. 1923. Untersucht nur Verzögerungszeiten von der Größenordnung 10^{-8} sec.

3) E. Regener u. W. Hiller, Zeitschr. f. Phys. 23. S. 129. 1924. Bei R. wurde die Verzögerungszeit in Abhängigkeit von der Überspannung untersucht.

4) N. Campbell, Phil. Mag. 38. S. 214. 1919.

5) M. v. Laue, Ann. d. Phys. 76. S. 261. 1925.

die durch die wohldurchdachten Zuberschen Versuche gut wiedergegeben werden soll. Wohl überrascht die Übereinstimmung des linearen Verlaufs der $\ln n_i^\infty$ in Abhängigkeit von t bei dem Zuberschen Versuch Nr. 36 mit der von v. Laue a. a. O. abgeleiteten Gleichung

$$\ln n_i^\infty = -\beta p(t-t_0) \quad \text{für } t > t_0.$$

Dabei bedeutet t die Zeit vom Augenblicke des Überspringens des Funkens an gerechnet, t_0 den Zeitpunkt des Wiederanlegens der Spannung, β die Wahrscheinlichkeit dafür, daß durch die Einwirkung des äußeren Ionisators ein Elektron oder Ion gebildet wird, p jene dafür, daß ein auf solche Art ausgelöstes Elektron oder Ion durch Stoßionisierung eine derartige Vermehrung erfährt, daß eine Entladung möglich wird.

$n_i^\infty = \int_t^\infty w(t) dt$ mit $w(t)$ als Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Quantitative Übereinstimmung besteht aber keineswegs. Denn rechnet man aus der Tabelle zu Versuch Nr. 36 bei Zuber das Produkt βp (das ist der Richtungskoeffizient der Geraden), so erhält man den Wert 1,86, also größer als 1. Einen derartigen Wert kann aber kein Produkt zweier Wahrscheinlichkeiten annehmen. Ich glaube, der Widerspruch würde nach Maßgabe eines größeren Umfanges der Versuchsreihe verschwinden. Es scheint dies auch in gewissem Zusammenhange mit einigen neueren Untersuchungen von v. Mises über den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu stehen, über die man nicht mehr hinwegschreiten dürfte.

1. Die Funkenentladung als Misessches Kollektiv.

In seiner sehr bemerkenswerten Arbeit in der Mathem. Zeitschr. hat R. v. Mises¹⁾ für die Wahrscheinlichkeitsrechnung jene Grundlagen geschaffen, die ihre Erhebung zur mathematischen Disziplin forderte. Bei Mises tritt der von ihm neu geschaffene Begriff des *Kollektivs* noch vor den der Wahrscheinlichkeit und bildet den Ausgangspunkt seiner Axiomatik. Gegenstand seiner Betrachtungen sind unendliche Folgen von

1) R. v. Mises, Mathem. Zeitschr. 5. S. 52. 1919.

Dingen, deren einzelne Glieder „Elemente“ heißen und die voneinander dadurch unterschieden werden, daß jedem Element ein Wertesystem von k reellen Veränderlichen x_1, \dots, x_k zugewiesen wird; mit andern Worten, die einzelnen Elemente werden auf die Punkte des k -dimensionalen „Merkmalraumes“ abgebildet. Dann heißt eine derartige Folge von Elementen nach v. Mises ein *Kollektiv*, falls jene Zuordnung der Merkmale an die Elemente zwei weitere Bedingungen erfüllt, die in den beiden Forderungen: *Existenz eines Grenzwertes (Wahrscheinlichkeit)* und *Regellosigkeit der Zuordnung*, ausgedrückt sind. Beide Forderungen drücken in mathematischer Form zwei beobachtbare Erscheinungen aus. Die erste formuliert die Ergebnisse umfangreicher Versuchsreihen an einem empirischen Kollektiv, wobei das Verhalten der relativen Häufigkeit für das Auftreten der einzelnen veränderlichen Merkmale beobachtet wurde. Dabei zeigte sich, daß die relative Häufigkeit für das Auftreten eines Merkmals einem Grenzwert zustrebte, wenn man nur den Umfang der Versuchsreihe hinreichend groß wählte.¹⁾ Er wird erreicht, wenn man die Reihe ins Unendliche fortsetzt. Die zweite Forderung drückt allgemein aus, daß das *Häufigkeitsverhältnis* zweier Merkmale eines Kollektivs — bei Unterdrückung der anderen Merkmale — sich nicht ändert, wenn man durch irgendeine „zulässige“ Vorschrift eine — hinreichend große — Gruppe von Beobachtungen herausgreift.²⁾

Wir fragen nun, ob in unserem Falle der Funkenentladungen ein Kollektiv vorliegt. „Elemente“ seien die Entladungen und das veränderliche Merkmal die Verzögerungszeit. Der Merkmalraum ist hier eindimensional. Wir bemerken, daß hier — wie überall, wo die Mathematik auf Gegenstände der Physik angewendet wird — dem inhaltslosen Schema der mathematischen Begriffe ein erlebbarer physikalischer Inhalt zugeordnet wird. Es ist also zu prüfen, ob jene beiden genannten Forderungen für unser Kollektiv zutreffen. Man hätte also, um das Zutreffen der ersten Forderung nachzuweisen,

1) Vgl. etwa die Würfelversuche von R. Wolf in E. Czuber, *Wahrscheinl.-Rechn.* 1. S. 167. 1914.

2) Diese Forderung drückt in mathematischer Form auch die *Unmöglichkeit eines Spielsystems* aus.

zu zeigen, daß die relative Häufigkeit für das Auftreten einer bestimmten Verzögerungszeit in Abhängigkeit von der Zahl der Entladungen einen asymptotischen Verlauf aufweist. Für die zweite Forderung wäre die Konstanz des Verhältnisses der relativen Häufigkeiten für das Auftreten zweier Verzögerungszeiten nachzuprüfen, gleichgültig, welche Versuchsserien größeren Umfanges dazu aus der unendlich gedachten Versuchsreihe ausgewählt werden. In gewissem Sinne ist diese Forderung auch bei Zuber stillschweigend vorausgesetzt worden, als für eine Versuchsreihe die vorausgegangenen Versuchsreihen an diesem Kollektiv nicht beachtet worden sind.

Leider ist es nicht möglich, aus den Meßresultaten in der Art, wie sie von Zuber veröffentlicht wurden, das Zutreffen der Forderungen nachzuprüfen. Es würde übrigens eine weit- aus größere Zahl von Entladungen in einer Versuchsserie notwendig werden, als bei den Zuberschen Versuchen. Ein Nachweis des Zutreffens dieser Forderungen würde erst die Theorie auf eine exakte Basis stellen.¹⁾

1) Es hat also nur dann einen Sinn von einer Wahrscheinlichkeit zu sprechen, wenn diese innerhalb eines Kollektivs definiert ist. Dies muß auch für die Ausgangswahrscheinlichkeiten β und p gelten. Die beiden Kollektivs, innerhalb denen β und p definiert sind, treten als *einfache Alternativen* auf, indem die Punktmengen der Merkmalsräume nur aus zwei Punkten a und b bestehen. Demgemäß ist β_a die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das in Frage stehende Ereignis — Bildung eines Elektrons oder Ions durch den äußeren Ionisator — eintrifft, β_b die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreffen ($\beta_a + \beta_b = 1$). Analog hat man die Wahrscheinlichkeiten p_a und p_b mit $p_a + p_b = 1$.

Durch die Operation der „Verbindung“ kann man aus den beiden gegebenen Kollektivs ein neues ableiten mit der neuen Verteilung βp . Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die physikalischen Bedingungen für das Zustandekommen des Funkens zutreffen. Soll außerdem die Verzögerungszeit t eintreten — die Wahrscheinlichkeit dafür sei $w(t)$ —, so erhält man durch abermalige Anwendung der Operation der Verbindung nunmehr als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten einer bestimmten Verzögerungszeit bei Zutreffen der physikalischen Bedingungen den Wert $\beta p w(t)$. $w(t)$ ist von „geometrischer Verteilung“ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $w'(t)$. Macht man den Ansatz

$$w'(t) + \beta p w(t) = 0 \quad \text{mit} \quad w(0) = \beta p,$$

so erhält man durch Integration dieser Differentialgleichung das von v. Laue abgeleitete Verteilungsgesetz.

her
ahl
für
der
ge-
en
ha
ng
für
an

der
en
it-
ot-
in
die

eit
ies
Die
in-
ur
ur-
ng
die
het

en
p.
en
die
,
er-
ee-
en
ter

on